정병훈T - 2017년 4월 30일 6평으로에피단다님 21번 자작문제 해설

21. $x>0$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$\int \{xf'(x)+f(x)\}dx=(\ln x)^2+a(\ln x)$$

가 성립할 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \geq 0$이다.
>
> (나) 곡선 $y=xf(x)$와 기울기가 m인 임의의 직선이 한 점에서만 만나게 하는 m의 최솟값은 2이다.

이 때, $\int_1^e f(x)dx$의 최솟값은? [4점]

① 2　　② $\frac{7}{3}$　　③ $\frac{8}{3}$　　④ 3　　⑤ $\frac{10}{3}$

<해설> $\frac{d}{dx}\{xf(x)\}=xf'(x)+f(x)$이므로, $\int \{xf'(x)+f(x)\}dx=(\ln x)^2+a(\ln x)$로부터

$xf(x)=(\ln x)^2+a(\ln x)+C$　(단, C는 적분상수)이다.

$g(x)=\int_1^x f(t)dt$라고 하면, 조건 (가)에서 $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$g(x_1) \leq g(x_2)$이다. 즉, $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 단조증가한다.

이것이 성립하기 위한 필요충분조건은 $x>0$인 모든 x에 대하여 $g'(x) \geq 0$이 성립하는 것이다.

즉, $x>0$인 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이 성립하는 것이다.

이 결과는 $x>0$인 모든 x에 대하여 $xf(x) \geq 0$가 성립하는 것과 필요충분조건이다.

$(\ln x)^2+a(\ln x)+C \geq 0$에서 $\ln x=t$라고 치환하면,

$x>0$인 범위에서 t는 모든 실수의 범위의 값을 갖는다.

즉, 모든 실수 t에 대하여 $t^2+at+C \geq 0$가 성립해야 한다.

$D_t=a^2-4C \leq 0$이므로, $C \geq \frac{1}{4}a^2$ …… ㉠이다.

조건 (나)에서 곡선 $y=xf(x)$와 기울기가 m인 임의의 직선이 한 점에서만 만난다는 조건은 기울기가 m인 임의의 직선의 방정식을 $y=mx+k$라 할 때, 모든 실수 k에 대하여 방정식 $xf(x)=mx+k$가 오직 하나의 양의 실근을 가짐을 의미한다.

$h(x)=xf(x)-mx$라고 하면, 모든 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $h(x)=k$가 오직 하나의 실근을 가져야 하므로, $h(x)$는 정의역이 $(0, \infty)$이고, 공역이 $(-\infty, \infty)$인 일대일대응인 함수가 된다. 이 때, $h(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 연속함수이므로, $h(x)$는 증가함수 또는 감소함수가 된다.

따라서 '$x>0$인 모든 x에 대하여 $h'(x) \geq 0$가 성립'하거나 '$x>0$인 모든 x에 대하여

$h'(x) \le 0$가 성립'해야 한다.

$\int \{xf'(x)+f(x)\}dx=(\ln x)^2+a(\ln x)$로부터 $xf'(x)+f(x)=\dfrac{2\ln x+a}{x}$이다.

그런데, $h'(x)=xf'(x)+f(x)-m=\dfrac{2\ln x+a}{x}-m$에서 $\lim\limits_{x\to 0+} h'(x)=-\infty$가 되어, $h'(x)$가 음수가 되는 x의 값이 존재한다. 따라서 $x>0$인 모든 x에 대하여 $h'(x)\le 0$가 성립해야 한다.

$h'(x)$의 증감을 조사하기 위하여 $h''(x)$를 구한다.

$h''(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\times x-(2\ln x+a)}{x^2}=\dfrac{2-a-2\ln x}{x^2}$이다.

$0<x<e^{1-\frac{a}{2}}$일 때 $h''(x)>0$이므로 $h'(x)$는 구간 $\left(0, e^{1-\frac{a}{2}}\right]$에서 증가한다.

$x>e^{1-\frac{a}{2}}$일 때 $h''(x)<0$이므로 $h'(x)$는 구간 $\left[e^{1-\frac{a}{2}}, \infty\right)$에서 감소한다.

따라서 함수 $h'(x)$는 $x=e^{1-\frac{a}{2}}$에서 최댓값을 갖는다.

결국 조건 (나)에서 곡선 $y=xf(x)$와 기울기가 m인 임의의 직선이 한 점에서만 만난다는 조건은 $h'\left(e^{1-\frac{a}{2}}\right)=\dfrac{2}{e^{1-\frac{a}{2}}}-m\le 0$와 같다. 즉, $m\ge \dfrac{2}{e^{1-\frac{a}{2}}}$를 만족하는 m의 최솟값이 2이므로,

$\dfrac{2}{e^{1-\frac{a}{2}}}=2$가 되어, $a=2$이고, ㉠에서 $C\ge 1$이다.

$xf(x)=(\ln x)^2+2(\ln x)+C$에서 $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2+2(\ln x)+C}{x}$이다.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{(\ln x)^2+2(\ln x)+C}{x}dx$$

$$=\int_0^1 (t^2+2t+C)dt$$

($\because$ $\ln x=t$로 치환하면, $\dfrac{1}{x}dx=dt$이다. $x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이다.)

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t^2+Ct\right]_0^1$$

$$=C+\frac{4}{3}\ge \frac{7}{3}$$

이 부등식의 등호는 $C=1$일 때 성립하므로, $\int_1^e f(x)dx$의 최솟값은 $\dfrac{7}{3}$이다.

정답 : ②