24

①-1. Comprehension

제시문 (가)를 보면 '평행이동과 정적분' '대칭이동과 정적분'이 설명 되어 있는데 합의 기호 시그마 또한 유사한 성질을 가진다고 되어 있다. 즉, 두 성질을 합의 기호에 적용시키는 것이 핵심이다.

평행이동과 합의기호 : $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(k) = \sum_{k=n-c}^{m-c} f(k+c)$

대칭이동과 합의기호 : $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(k) = \sum_{k=-m}^{-n} f(-k)$

이 두 가지를 금방 유도 할 수 있는데 주어진 문제에 어떻게 활용해야 할지 느낌이 잘 안올 것이다.
시그마 문제가 해결이 바로 안 될 때에는 시그마를 풀어서 나열해보는 것이 기본이다.
(수리영역에서도.)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n} f(k)$, $f(n)+f(2-n)=(n-1)^{10}+2(n-1)^2 \cdots$ ①

$$\begin{aligned}\sum_{k=2-n}^{n} f(k) &= f(2-n)+f(3-n)+\cdots+f(n-1)+f(n)\\
&=\{f(n)+f(2-n)\}+\{f(n-1)+f(3-n)\}+\cdots+\{f(2)+f(0)\}+f(1)\\
&=\{f(n)+f(2-n)\}+\{f(n-1)+f(3-n)\}+\cdots+\{f(2)+f(0)\}+\{f(1)+f(1)\}-f(1)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(2-k)\}-f(1)=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(2-k)\} \quad (\because \text{①에서 } f(1)=0)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{(n-1)^{10}+2(n-1)^2\}=\sum_{k=0}^{n-1}(n^{10}+2n^2) \quad (\because \text{평 행 합의기호 })\end{aligned}$$

여기까지 변형 했다면 이제 계산하는 일만 남았다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n} f(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}(k^{10}+2k^2)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{10}+\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{10}\right\}+\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{10}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{10}\right\}=\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}$$

①-2. Point

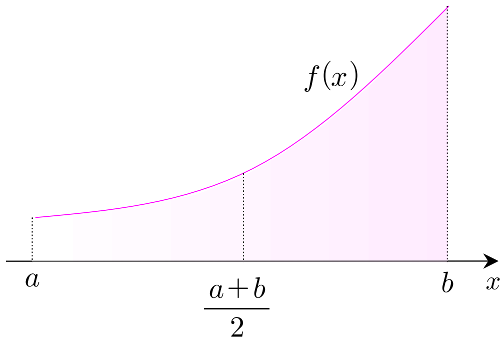
point 1

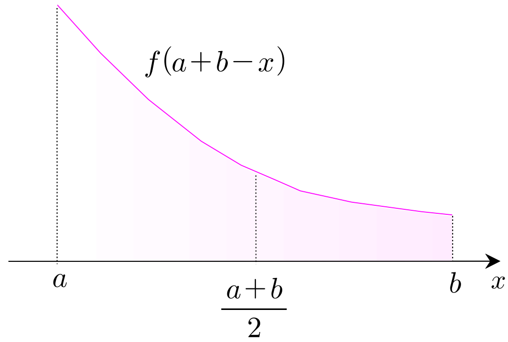
평행이동 보다는 대칭이동과 정적분, 대칭이동과 합의기호가 문제의 핵심이다.

대칭이동에 대해 좀 더 자세히 배워보자.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{f(x)+f(a+b-x)\}dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

대칭이동해서 그래프를 그려보거나 치환적분을 이용하면 다음과 같은 정적분 항등식을 유도 할 수 있다.





$f(x)$를 $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대칭한 함수는 $f(a+b-x)$이다. 그래프를 보면 공식이 이해될 것이다.

$a+b-x=t$로 치환적분해도 주어진 공식이 모두 증명된다.

이와 관련 문제가 수학익힘책이나 기본서에 가끔 보이는데 2010 수능 선택 미분과 적분 29번 문제에도 출제된 적이 있다.

또, 정적분 공식을 합의기호에 적용시키면 다음과 같은 일반화된 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\sum_{k=a}^{b} f(a+b-k)$$

$$=\begin{cases} a+b=2n & \displaystyle\sum_{k=\frac{a+b}{2}}^{b}\{f(k)+f(a+b-k)\}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sum_{k=a}^{\frac{a+b}{2}}\{f(k)+f(a+b-k)\}-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ a+b=2n+1 & \displaystyle\sum_{k=\left\langle\frac{a+b}{2}\right\rangle}^{b}\{f(k)+f(a+b-k)\}=\sum_{k=a}^{\left[\frac{a+b}{2}\right]}\{f(k)+f(a+b-k)\} \end{cases}$$

(단, $\langle x\rangle$는 x보다 작지 않은 최소의 정수) (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

$a+b$가 짝수 일 때는 가운데 항이 겹치므로 한번 빼줘야 하고

$a+b$가 홀수 일 때는 항의 개수가 반, 반 딱 맞게 떨어지므로 빼줄게 없다.

다만 $\dfrac{a+b}{2}$가 정수가 아니므로 올림기호, 내림기호를 적용하면 일반화를 할 수 있다.

간단한 예로 다시 이해를 해보자.

$a+b=$ 짝수 일 때,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(k)=\sum_{k=1}^{5} f(6-k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ 인데,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{1+5}{2}}\{f(k)+f(6-k)\}=\sum_{k=\frac{1+5}{2}}^{5}\{f(k)+f(6-k)\}=f(1)+f(2)+2f(3)+f(4)+f(5)$ 이므로,

$f(3)$을 양변에 한번 빼줘야 한다.

$a+b=$홀수 일 때,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} f(k)=\sum_{k=1}^{4} f(5-k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 인데,

$\sum_{k=1}^{2}\{f(k)+f(5-k)\}=\{f(1)+f(4)\}+\{f(2)+f(3)\}=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 이므로,

$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1+4}{2}\right]}\{f(k)+f(5-k)\}$이라 할 수 있다.

마찬가지로, $\sum_{k=3}^{4}\{f(k)+f(5-k)\}=\{f(3)+f(2)\}+\{f(4)+f(1)\}=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ 이므로,

$\sum_{k=\left\langle\frac{1+4}{2}\right\rangle}^{4}\{f(k)+f(5-k)\}$이라 할 수 있다.

이 사실을 제시문에서 이끌어 냈다면

$$\sum_{k=2-n}^{n}f(k)=\sum_{k=2-n}^{n}f(2-k)=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(2-k)\}-f(1)=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(2-k)\}$$

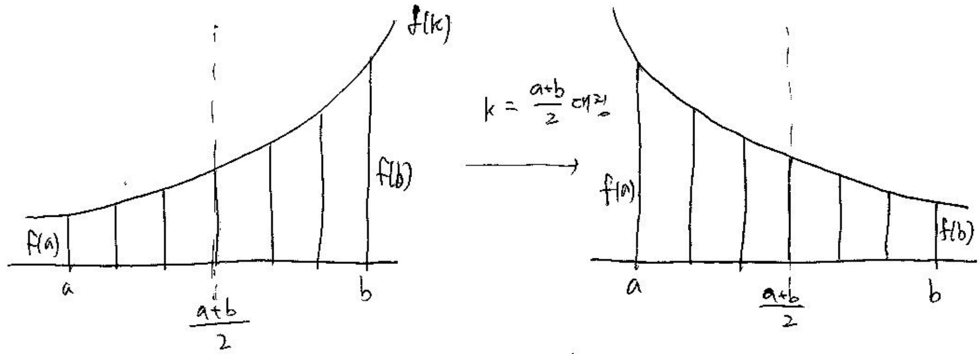
(∵ 대칭이동과 합의기호)

이렇게 바로 식을 써나갈 수 있으며 여기서 대칭이동과 합의기호가 사용되는 것을 알 수 있다.

①-3. Actual Fight

(a)

대칭성에 의해 $\sum_{k=a}^{b}f(k)=\sum_{k=a}^{b}f(a+b-k)=\sum_{k=\frac{a+b}{2}}^{b}\{f(k)+f(a+b-k)\}$ --- ①



항이 홀수개 ⟶ $a+b$ = 짝수 ⟶ $\frac{a+b}{2}$ 는 정수

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=2-n}^{n}f(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=1}^{n}\{f(k)+f(2-k)\}\quad(\because ①)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^{10}+2(k-1)^{2}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}(k^{10}+2k^{2})\quad(\because \text{평행 이동})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{10}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{2}}_{=0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{11}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{10}=\int_{0}^{1}x^{10}\,dx=\frac{1}{11}$$

해설에서는 설명을 위해 많은 글이 들어갔지만 실전에서는 이정도 서술이면 제대로 된 점수를 받을 수 있다. 사진에서 보듯이 (⋯㉠), (⋯①), (∴), (∵) 등의 기호를 적절히 활용하면, 매우 깔 끔 서술 할 수 있다.

②-1. Comprehension

단순한 부분적분 반복 문제인데 계산 실수만 안하면 쉽게 풀 수 있는 문제다.

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx =$$

$$\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}(1-x)^{n-2}dx$$

분모의 $(n+2)$는 x^{n+2}의 지수랑 똑같고

분자의 $(n-1)$은 $(1-x)^{n-2}$의 지수보다 1 크다

또 $x^{n+2}(1-x)^{n-2}$에서 보면 x와 $1-x$의 지수는 n에 대해 대칭적이다

이 규 칙 찾아서 계속해서 부분적분하면

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}\int_0^1 x^{2n-1}(1-x)dx$$ ($(1-x)$의 지수가 1이므로 x의 지수는 $2n-1$)

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

②-2. Point

point 1

수리논술 중에 비교적 쉬운 편에 속하는 문제다. 부분적분을 반복하면서 규칙을 잘 찾아서 실수만 하지 않으면 무난하게 해결 할 수 있는 문제다. 규칙성 발견하는 부분을 다시 한 번 공부해보고 이와 같은 방식은 수학적귀납법 문제를 풀 때에도 많이 쓰인다.

point 2

$$\left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx\right| = \left|\frac{am!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\right|$$

다음과 같은 공식은 심화교재에서 볼 수 있는데 외우지 말고 증명을 꼭 해봐야 한다.

필자는 주어진 공식을 여러 번 증명해봤고 증명 횟수가 많아지면서 공식도 자연스럽게 외우고 있어서 공식으로 답을 찾은 다음 중간풀이를 채우는 식으로 문제를 풀었다. 이 처럼 암기된 공식을 통해 먼저 답을 쉽게 찾은 다음 그 중간 풀이를 채워가는 것도 하나의 방법이 될 수 있다. 수리논술을 잘 치기 위해서는 평소에 만나는 공식을 외우지만 말고 반드시 증명 해보길 바라고 심화교재에 있는 공식 또한 증명해본다면 이런 식으로 시험에 그대로 나올 수도 있다. 이 적분 공식에서 $m=1$, $n=1$ 일 때, $\left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right| = \left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$이 되는데 이 공식은 시중 기본서에서 볼 수 있고 꼭 기억해야 한다.

$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$을 적분할 때, $\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ 이대로 두고 적분하지 말고

$\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx = \int_{0}^{\beta-\alpha} ax^m(x+\alpha-\beta)^n dx$ (∵ 평행이동과 정적분)

$=(\beta-\alpha)x\int_{0}^{1} a(\beta-\alpha)^m x^m((\beta-\alpha)x-(\beta-\alpha))^n dx$ (∵ 치환적분) or (∵ 확대/축소와 정적분)

$=a(\beta-\alpha)^{m+n+1}\int_{0}^{1} x^m(x-1)^n dx$

이렇게 평행이동과 치환적분을 이용해서 식을 최대한 간단하게 정리한 후에 부분적분을 하는 것이 좋다.

여기서 확대/축소와 정적분인 $\int_{a}^{b} f(x)dx = m\int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} f(mx)dx$ 이 사용되는데 다음 공식은 치 환 설명이 가능하다. 그리고 확대/축소와 정적분은 교과서에 정식적으로 설명되어 있지 않으므로 (∵ 확대/축소와 정적분) 보다는 (∵ 치환적분) 이라고 쓰는 것이 논술답안으로 더 좋을 것이다.

②-3. Actual Fight

(b)

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(1-x)^n\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}dx = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}(1-x)^{n-2}dx$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)\cdots(2n-1)}\int_0^1 x^{2n-1}(1-x)dx$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots 2}{(n+1)\cdots(2n-1)}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

시 험 , 시험장에서 주는 연습장에 계산을 하고, 답안지에는 계산과정을 많이 생략해도 된다. 하지만, 똑바로(교과과정에 맞게) 풀었다는 증거가 되는 부분은 반드시 서술해줘야 한다.

③-1. Comprehension

②의 결과와 제시문 (다)를 이용해야 한다.

수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ,ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이 수리논술 또한 앞 문제를 이용해 다음 문제를 푸는 경우가 많다.

(b)에서 $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ 이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx$$

$0 \le x \le 1$ 에서 $f_n(x) = 2x(1-x)^n$은 $0 \le \{2x(1-x)\} \le \frac{1}{2}$ 이므로 $|f_n(x)| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이고 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n dx$$

$-1 < \{2x(1-x)\} < 1$ 이므로 $\sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n = \frac{1}{1-2x(1-x)} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^2-2x+1} dx$$

$\therefore$ 다항함수 $p(x) = 2x^2 - 2x + 1$

③-2. Point

point 1

수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ,ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이, 앞 문제를 이용해서 다음 문제를 풀 수 있는 논술이 여러 대학에서 출제되고 있으니 앞 문제를 의식하면서 다음문제를 풀도록 해야 한다. 2011 고려대 수리논술의 경우 논제에 '②를 이용해서' 라고 언급 해주었지만 2011 연세대 수리논술 에서는 언급해 주지 않았다. 항상 앞 문제를 의식하는 습관 들여야 한다.

point 2

② 문제는 한 문제 이지만 그 안에 2개의 문제가 있다. 시험현장에서 당황하게 되면 묻는 두 가지를 정확하게 답하지 않고, 마지막 문제만 푼다거나 하는 일이 생긴다. 논술 시험을 칠 때, 하나하나 묻는 것에 각각 줄을 치고 묻는 것 모두에 답하도록 노력해야 한다.

③-3. Actual Fight

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx$$

$0 \leqq x \leqq 1$ 에서 $f_n(x) = \{2x(1-x)\}^n$은 $0 \leqq 2x(1-x) \leqq \frac{1}{2}$ 이므로.

$|f_n(x)| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이고 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \{2x(1-x)\}^n dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{2x(1-x)\}^n dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-2x(1-x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x^2-2x+1} dx$$

$$\longrightarrow P(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

수리논술 문제 마다 조금씩 다르겠지만 실제 답안지에 한글을 많이 적을 필요가 없다.

④-1. Comprehension

$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^3}\left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt\right)$ 에서 $g(x) = \int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)dt$ 라 하자.

$\lim_{x \to a}(x-a)^3 = 0$ 이면 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이다. $g(x)$는 연속이므로 미정계수의 결정에 의해 $g(a) = 0$

$g(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = (x-a)h_1(x) \ \cdots$ ①

①을 주어진 식에 대입하면 $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)h(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \to a} \frac{h_1(x)}{(x-a)^2}$ 이 존재해야 하므로

미정계수의 결정에 의해 $h_1(a) = 0$이고 ①과 마찬가지로 $h_1(x) = (x-a)h_2(x) \ \cdots$ ② 이 된다. 또 대입하면,

$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^3} = \lim_{x \to a} \frac{h_1(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{h_2(x)}{x-a}$에서 미정계수의 결정에 의해 $h_2(a) = 0$이고 $h_2(a) = 0$을 이용해서 식을 정리하면 $\lim_{x \to a} \frac{h_2(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{h_2(x) - h_2(a)}{x-a} = h_2{}'(a)$

즉, 세 번의 미정계수의 결정으로 $g(a) = 0$, $h_1(a) = 0$, $h_2(a) = 0$을 얻을 수 있고 극한값은 $h_2{}'(a)$임을 알 수 있다.

$h_1(a)$를 $g(x)$에 관한 식으로 고치기 위해 관계식 $g(x) = (x-a)h_1(x)$을 이용. $g(x) = (x-a)h_1(x)$에

$x=a$를 대입하면 $h_1(a)$가 0과 곱해지면서 없어진다. 그리고, 주어진 식을 미분하면

$g'(x)=h_1(x)+(x-a)h_1'(x)$이 되므로 $g'(a)=h_1(a)$이다. 따라서, $h_1(a)=g'(a)=0$, $h_2(a)$를 $g(x)$에 관한 식으로 고치기 위해 ①, ②를 이용해 관계식을 찾으면 $g(x)=(x-a)^2h_2(x)$이고 주어진 식을 두 번 미분하면

$g''(x)=2h_2(x)+4(x-a)h_2'(x)+(x-a)^2h_2''(x)$이므로 $g''(a)=2h_2(a)$이다.

따라서, $h_2(a)=\dfrac{g''(a)}{2}=0$이고, $g''(a)=0$이 된다.

여기서 극한값인 $h_2'(a)$도 $g(x)$에 관한 식으로 고쳐보자.

$g''(x)=2h_2(x)+4(x-a)h_2'(x)+(x-a)^2h_2''(x)$을 한 번 더 미분하면

$g'''(x)=6h_2'(x)+6(x-a)h_2''(x)+(x-a)^2h_2'''(x)$ 이므로, $h_2'(a)=\dfrac{g'''(a)}{6}$가 된다.

따라서, $g(a)=g'(a)=g''(a)=0$이고 극한값은 $\dfrac{g'''(a)}{6}$임을 알 수 있다.

$g(x)=\displaystyle\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt$에서 $g(a)=g'(a)=g''(a)=0$ (즉, $(x-a)^3$는 $g(x)$의 인수) 이 되어야 한다.

$x=a$을 대입하면 $g(a)=0$임을 알 수 있다.

$g'(x)=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)-\left\{f(x)-\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)\right\}=f\left(\dfrac{a+x}{2}\right)-f(x)$ 에서 $g'(a)=0$

$g''(x)=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{a+x}{2}\right)-f'(x)$ ⋯ ③ 에서 $g''(a)=-\dfrac{1}{2}f'(a)=0$ 이 되어야 한다.

따라서 $f'(a)=0$ 일 때, 극한값이 존재한다.

③를 미분하면 $g'''(x)=\dfrac{1}{4}f''\left(\dfrac{a+x}{2}\right)-f''(x)$에서 $g'''(a)=-\dfrac{3}{4}f''(a)$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left(\int_a^{\frac{a+x}{2}}f(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^{x}f(t)dt\right)=\frac{g'''(a)}{6}=-\frac{1}{8}f''(a)$$

④-2. Point

point 1

2011 고려대 수리논술에서 가장 어려운 문제였고 논리적인 풀이가 요구되는데,

상황생이 논리를 많이 비약해서 $g(x)$가 $(x-a)^3$을 인수로 가진다고 해서 문제를 풀었다. 위에 풀이에서 보듯이 제시문 (라)에 주어진 인수정리를 세 번이나 써가면서 $(x-a)^3$이 인수인 이유를 설명했고 그것이 논리적인 풀이가 되겠다.

point 2

연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=b$이면, $f(a)=0$, $f'(a)=b$ 를 이용하는 기본문제를 많이 봤을 것이다. 기본서를 좀 더 깊게 공부하다보면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^2}=b$과 같은 식을 만나게 되는데 대부분의 학생이 '로피탈의 정리'로 문제를 풀어 버려서 논제 (d)가 상당히 어려웠을 것이다. 즉, 평소 수리가형을 공부 할 때
빠른 풀이 또한 가형을 위해 공부해야 하지만 교과과정에 맞는 풀이 또한 반드시 해봐야 한다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^2}=b$이면, $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $\frac{f''(a)}{2}=b$ 을 교과과정에 맞는 풀이로 유도해보자.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^2}=b$ 에서 미 정 결정을 이용해서 $f(a)=0$

인수정리를 이용하면 $f(a)=0$ $\rightarrow$ $f(x)=(x-a)g(x)$ 주어진 식을 대입하면 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=b$이 된다.

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=b$ 에서 미정계수의 결정을 이용해서 $g(a)=0$

$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$ 이므로 $g'(a)=b$가 된다.

이제 $g(a)$를 $f(x)$에 관한 식으로 고쳐야 하는데 관계식이 $f(x)=(x-a)g(x)$밖에 없다
$f(x)=(x-a)g(x)$에서 $g(a)$를 구하기 위해 $x=a$를 넣어보면 $g(a)$에 0이 곱해지면서 사라진다.
그것을 피하기 위해서 $f(x)=(x-a)g(x)$을 미분하면 $f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$
여기서 $x=a$를 대입하면 $f'(a)=g(a)$이 된다. $g(a)=0\rightarrow f'(a)=0$
또 $g'(a)$를 $f(x)$에 관한 식으로 고치 위해서 $f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$을 또 미분하면

$f''(x)=2g'(x)+(x-a)g''(x)$이 된다. 따라서 $f''(a)=2g'(a)$가 된다. $g'(a)=b\rightarrow\frac{f''(a)}{2!}=b$

이렇게 해서, $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $\frac{f''(a)}{2}=b$을 로피탈의 정리 없이 유도해 내었다

미정계수의 결정, 인수정리, 관계식 미분으로 유도해 낼 수 있다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^3}=b$이면, $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $\frac{f'''(a)}{3!}=b$ 또한 로피탈 없이 유도해보길 바란다.

point 3

관계식 $f(x)=(x-a)g(x)$에서 $g'(a)=f(a)$를 유도하기 위해 식을 미분해야 하는데
그것을 생각 어려울 수 있었지만 로피탈의 정리를 이용해서 풀 수 있다는 것이 미분을 하라는 힌트가 된다. 필자는 로피탈의 정리를 이용해서 먼저 답을 찾은 다음 중간 풀이를 채워가기 시작했다. 이 처럼 교 과 과정을 통해 먼저 답을 쉽게 찾은 다음 그 중간 풀이를 채워가는 것도 하나의 방법이 될 수 있다.

④-3. Actual Fight

(d)

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^3}\left(\int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)\,dt\right) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^3}$$ 이 존재해야

하므로 $\lim_{x\to a}(x-a)^3 = 0 \to \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0 \to g(x) = (x-a)h_1(x)$ --- ①

(∵ $g(x)$는 다항 함수이고 연속)

$\lim_{x\to a}\frac{h_1(x)}{(x-a)^2}$ 가 존재해야 하므로 $h_1(a) = 0 \to h_1(x) = (x-a)h_2(x)$ --- ②

$\lim_{x\to a}\frac{h_2(x)}{x-a}$ 가 존재해야 하므로 $h_2(a) = 0 \to \lim_{x\to a}\frac{h_2(x)-h_2(a)}{x-a} = h_2'(a)$

∴ $g(a)=0$, $h_1(a)=0$, $h_2(a)=0$, 극한값 $= h_2'(a)$

① 에서 $g'(x) = h_1(x) + (x-a)h_1'(x) \longrightarrow g'(a) = h(a)$

①, ② 에서 $g(x) = (x-a)^2 h_2(x)$

$\to g'(x) = 2(x-a)h_2(x) + (x-a)^2 h_2'(x)$

$\to g''(x) = 2h_2(x) + 4(x-a)h_2'(x) + (x-a)^2 h_2''(x) \to g''(a) = 2h_2(a)$

$\to g'''(x) = 2h_2'(x) + 4h_2'(x) + 6(x-a)h_2''(x) + (x-a)^2 h_2'''(x)$

$\longrightarrow g'''(a) = 6h_2'(a)$

∴ $g(a) = g'(a) = g''(a) = 0$, 극한값 $= \frac{g'''(a)}{6}$

$g(x) = \int_a^{\frac{a+x}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} f(t)\,dt \longrightarrow g(a) = 0$

$g'(x) = f\left(\frac{a+x}{2}\right) - f(x) \longrightarrow g'(a) = 0$, $g''(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - f'(x) \to g''(a) = -\frac{1}{2}f'(a) = 0$

$\boxed{\therefore f'(a) = 0 \text{ 일 때, 극한값 존재}}$

$g'''(x) = \frac{1}{4}f''\left(\frac{a+x}{2}\right) - f''(x) \longrightarrow g'''(a) = -\frac{3}{4}f''(a)$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(x-a)^3} = h_2'(a) = \frac{g'''(a)}{6} = -\frac{1}{8}f''(a)$$

로피탈의 정리 없이 완벽히 논리적으로 해결했다. 이와 같이 논리적 비약을 해서는 안 된다.

25

①-1. Comprehension

일단, 넓이 $S(t)$를 찾아보자.

직선 OP의 방정식은 $y=\left(\dfrac{y(x)}{x(t)}\right)x$이므로

: 부채꼴 OAP의 넓이$=\displaystyle\int_0^{x(t)}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x\,dx+\int_{x(t)}^1\sqrt{1-x^2}\,dx\ =P\ \cdots$ ①

이고

$x^2+y^2=1$에서 $y\to ky$를 대입해야 $x^2+k^2y^2=1$이 되므로

원 $x^2+y^2=1$위의 모든 점의 y좌표가 $\dfrac{1}{k}$배가 된다.

즉, 점 P를 원에 대입하면 $x(t)^2+y(t)^2=1$이 성립하게 되고, 점 Q를 $x^2+k^2y^2=1$에 대입했을 때 성립해야 하므로 점 Q는 점 P의 y좌표를 $\dfrac{1}{k}$배 한 $Q\left(x(t),\dfrac{1}{k}y(t)\right)$이 된다.

직선 OQ의 방정식은 $y=\left(\dfrac{1}{k}\right)\times\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)x$이므로

: 도형 OAQ의 넓이$=\displaystyle\int_0^{x(t)}\left(\frac{1}{k}\right)\times\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x\,dx+\int_{x(t)}^1\left(\frac{1}{k}\right)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{k}\left\{\int_0^{x(t)}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x\,dx+\int_{x(t)}^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right\}=S(t)\ \cdots ②$$

①, ②에서 $\left(\dfrac{1}{k}\right)\times P\ =\ S(t)$ 라는 것을 알 수 있다. 따라서, 도형 OAQ의 넓이는 부채꼴 OAP의 넓이의 $\dfrac{1}{k}$배 이므로, $P=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\theta$에서 $S(t)=\left(\dfrac{1}{k}\right)\left(\dfrac{1}{2}\theta\right)=\dfrac{\theta}{2k}$가 된다. 주어진 식을 t에 대해 미분하면

$\dfrac{d\{S(t)\}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\theta}{2k}\right)$, 여기서 θ는 변수이고 k는 상수이므로, $\dfrac{d\{S(t)\}}{dt}=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\theta}{2k}\right)\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$

즉, $\dfrac{d\{S(t)\}}{dt}=\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$ 에서 $\dfrac{d\theta}{dt}$가 상수인지 알아 하는데, 점 P가 시계 반대 방향으로 시각 t에 따라 일정한 속도로 돌고 있으므로 그 이동거리인 호 AP를 l이라 하자. 반지름이 1이므로 $l=\theta$가 된다, 따라서, $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{dl}{dt}$인데, 호 AP의 변화율 $\dfrac{dl}{dt}$가 상수이므로, $\dfrac{d\theta}{dt}$이 상수가 된다. 또한, k도 상수이므로 $\dfrac{d\{S(t)\}}{dt}$가 상수이다.

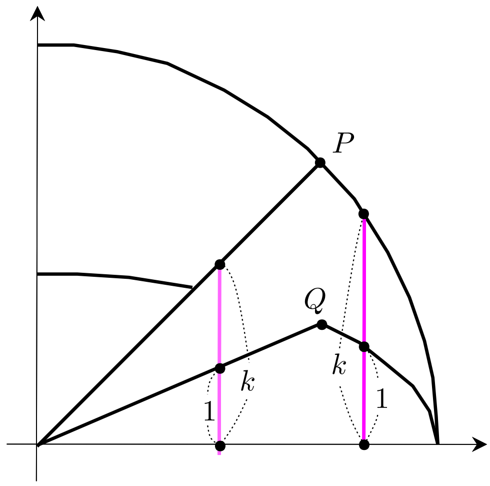
①-2. Point

point 1

[점 $P(x(t),y(t))$가 단위원 위의 점 $A(1,0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 시각 t에 따라 일정한 속도로 돌고 있다.] 라는 문장을 식으로 해석해야 한다. 여기서, 점 P가 원 위를 회전하게 되는데, 방향이 계속해서 바뀌므로 '속도가 일정' 한 것은 불가능하다. 따라서 스스로 '속력이 일정'하다고 생각하고 풀어야 한다. 이 오류에 대해 지적했다면 더 좋은 점수를 받을 수 있었을 것이지만, 시험 현장에서 이것을 지적한 사람은 드물 것이다. 이처럼 시험문제 지문에 함정(오류)이 있을 수도 있음을 명심해두자. (실제 사례가 몇 번 있다.)

point 2

넓이 $S(t)$를 '논리적으로' 구하는 것이 포인트 인데, 그 방법은 다양하다. 1. Comprehension에서 제시한 방법은 교과서적으로 정적분을 이용하여 부채꼴의 넓이와의 관계를 찾아서 $S(t)$를 찾는 방법이다. 이번에는, '카발리에리의 원리'를 이용해서 구해보자. <그림 1>에서

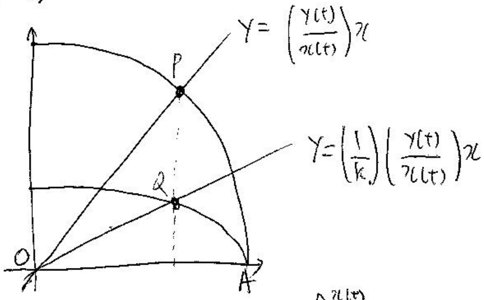


<그림 1>

y축에 평행한 파란선분(직선 OP 부분)으로 도형을 자르거나, 빨간선분(원, 타원 부분)으로 도형을 자르면 항상 길이비가 $k:1$이 되게 된다. 따라서 $S(t)$의 넓이는 부채꼴 넓이의 $\frac{1}{k}$배가 된다. 방법보다 훨씬 빠르게 쉽게 $S(t)$를 찾을 수 있다. 이때 기존의 정적 OP와 직선 OQ의 기울기가 $\frac{1}{k}$배 이므로, 파란선분의 길이비가 $k:1$가 된다는 사실과, 원에서 타원으로 갈 때, $y \to ky$이므로, 길이비가 $k:1$가 된다는 두 가지 이유를 명백히 서술 해 주 어 할 것이다.

①-3. Actual Fight

<1-1>



문제에서 원위를 움직이는 점 P는 계속해서 방향이 바뀌므로 '일정한 속도'가 아니라 '일정한 속력'으로 해석해서 풀어보자.

$$\text{부채꼴 } OAP = \int_0^{x(t)} \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x\,dx + \int_{x(t)}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = P$$

$$S(t) = \text{도형 } OAQ = \int_0^{x(t)} \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)x\,dx + \int_{x(t)}^{1} \left(\frac{1}{k}\right)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{k}P$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{k}P = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2k}$$

$$\to \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{2k}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta}{2K}\right)\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{2k}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \text{상수} \quad \left(\because k\text{는 상수},\ \frac{d\theta}{dt}\text{는 상수} \cdots ①\right)$$

①: 점 P가 일정한 속력으로 움직이는데 호 $AP = l = \theta$ 이므로

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \text{ 는 상수}$$

카발리에리의 원리를 이용한 답안지도 작성해보길 바란다. 교과과정을 벗어나는 정리이기도 하지만, 교과서 탐구활동에 제시되어 있고 그 원리에 맞게 비율이 $k:1$이 되는 이유를 올바르게 설명한다면 감점이 없을 것이다**(하지만 위와 같은 정적분의 실수배를 활용한 서술이 더 고교과정에 맞고 안전한 풀이라 할 수 있다.)** 또한, 수리영역에 있어서 카발리에리의 원리는 타원의 넓이, 타원의 회전체, 정적분 등을 이해하는데 도움이 되고 문제를 빠른 속도로 해결하는데 도움이 된다. 그리고 논술에서도 도움이 되므로 상 위 공부 하는 것이 좋다. 또한 위 답안지처럼 "속도가 일정"에 오류가 있음을 지적한다면 100점의 답안지가 될 것이다.

②-1. Comprehension

일단, '적어도 하나'라는 말에서, 평균값의 정리 혹은 중간값의 정리 가 쓰인다는 사실 깨달아야 한다. 여기서 점 $P(x(t), y(t))$, 점 $Q\left(x(t), \frac{1}{k}y(t)\right)$ 인데, α와 θ의 관계식을 찾아야 하는데, $\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)}$이고

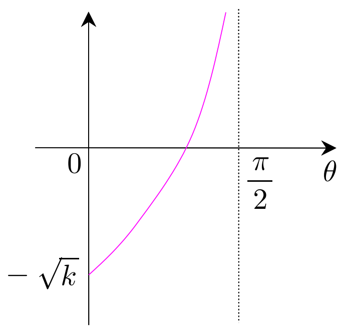
$\tan\alpha = \left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$이므로, $\tan\theta = k\tan\alpha$ ⋯ ① 라는 관계식을 얻을 수 있다. 여기서 시간에 대한 변화율을 구하기 위해 양변을 t에 대해 미분하면,

$\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{k}\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$이고, $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$일 때, $\sec^2\alpha = \frac{1}{k}\sec^2\theta$ ⋯ ② 이다.

②에서 $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{k}(1+\tan^2\theta)$, 관계식을 이용하면 $1+\frac{1}{k^2}\tan^2\theta = \frac{1}{k}(1+\tan^2\theta)$이고 정리하면

$\tan\theta = \sqrt{k}$가 된다. $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$에서

$f(\theta) = \tan\theta - \sqrt{k}$의 그래 그려보면 오른쪽 그림과 같다.



여기서 $f(\theta)$는 연속이고, $f(0) = -\sqrt{k}$, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = \infty$이므로

$\tan\theta - \sqrt{k} = 0$를 만족하는 θ가 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$에 적어도 하나 존재하게 된다. 또한 $\tan\theta = \sqrt{k}$일 때, ①에서 $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{k}}$이므로

두 값을 곱하면 $\tan\theta \times \tan\alpha = 1$이라는 관계식을 얻을 수 있다. 식 $\tan\theta \times \tan\alpha = 1$을 더 정리하면 $\tan\theta = \frac{1}{\tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$이므로, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$라는 관계식을 최종적으로 이끌어낼 수 있다.

극한값 $$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\left\{\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\left\{\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right\}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\left\{\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}\times\tan\alpha}{\left\{\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right\}\times\tan\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left\{\dfrac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\} \times \tan\alpha}{\left\{\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right\} \times k\tan\alpha} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\left\{\dfrac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right\}}{\left\{\dfrac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right\} \times k} = \frac{1}{k}$$

$(\because \tan\theta = k\tan\alpha)$ $\left(\because \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1\right)$

②-2. Point

point 1

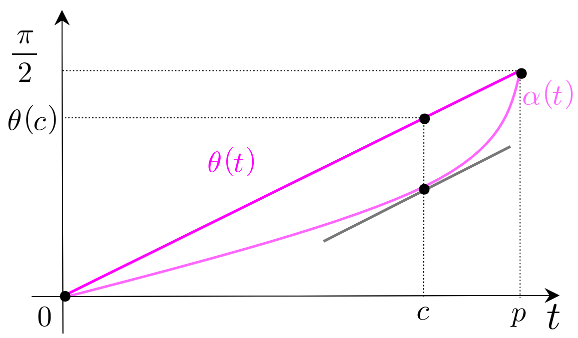
'적어도 하나'라는 멘트가 보이면 중간값의 정리나 평균값의 정리(롤의 정리)를 이용해서 풀 수 있다는 것을 알아야 한다. 이것은 수리영역 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문항에서도 자주 나오므로 확실 공부해야 한다.

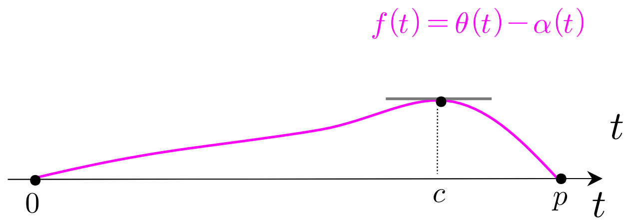
<1-2>를 평균값의 정리로 풀어 보자.

각 θ와 각 α가 모두 t에 관한 변수이므로 편의상 $\theta(t)$, $\alpha(t)$라 하고,

$\theta = \frac{\pi}{2}$인 순간의 시각 $t = p$ 라고 약속하자.

$f(t) = \theta(t) - \alpha(t)$라 하면 $f(0) = 0$, $f(p) = 0$이다. 그런데, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\theta(t) > \alpha(t)$이므로





그래프가 위와 같이 그려지고, $f(0) = 0$, $f(p) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해서

$f'(t) = 0$인 순간이 $0 < t < p$에 반드시 존재한다.

$f'(t) = 0 \rightarrow \theta'(t) - \alpha'(t) = 0 \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$이므로,

$0 < t < p$에서 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$을 만족시키는 t가 적어도 하나 존재하게 되고, 그 t를 c라 하면

$\theta(c)$값이 $0 < \theta(c) < \frac{\pi}{2}$에 존재하게 된다.

여기서 다시 1. Comprehension처럼 식을 정리해야 α와 θ의 관계식을 찾을 수 있다.

따라서 1. Comprehension처럼 중간값의 정리로 푸는 것이 더 빠른 풀이라 할 수 있다.

<1-2>를 조금 다른 방식으로 식을 정리해서 중간값의 정리를 이용해보자. $\tan\theta = k\tan\alpha$에서

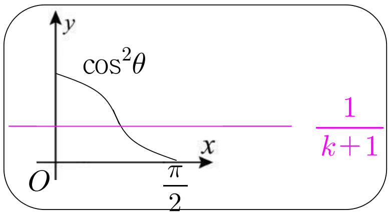
양변을 t에 대해 미분하면, $\sec^2\alpha\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{k}\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}$이고, $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}$일 때, $\sec^2\alpha = \dfrac{1}{k}\sec^2\theta$에서

$k\cos^2\theta - \cos^2\alpha = 0 \cdots$ ① 이다. $\tan\theta = k\tan\alpha$에서 $\cos\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{\tan^2\theta + k^2}}$이므로, ①에 대입하면

$k = \dfrac{k^2}{\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta}$이고 정리하면 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{k+1}$이 된다. $f(\theta) = \cos^2\theta - \dfrac{1}{k+1}$라 할 때,

$f(0) = 1 - \dfrac{1}{k+1} > \dfrac{1}{2}$ ($\because k > 1$ 이므로, $0 < \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{2}$), $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{k+1} < 0$ 이다.

따라서 $f(0)f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$이므로, 중간값의 정리에 의해 θ값이 존재 한다.



또한, 두 변화율이 같아지는 순간의 α와 θ의 관계식을 다시 찾아야 하는데, 그 순간에 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{k+1}$이 성립하므로, $\sec^2\alpha = \dfrac{1}{k}\sec^2\theta$에 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{k+1}$을 정리한 $\sec^2\theta = k+1$을 대입하면 $\sec^2\alpha = \dfrac{k+1}{k}$인데,

$\sec^2\theta = k+1$에서 $\tan^2\theta = k$이고 $\sec^2\alpha = \dfrac{k+1}{k}$에서 $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{k}$이므로

곱하면 $\tan^2\theta \times \tan^2\alpha = 1$이고 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$에서 $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta \geqq 0$, $\tan\alpha \geqq 0$ 이므로,

$\tan\theta \times \tan\alpha = 1$이라 할 수 있다. 따라서 마찬가지로 정리하면 $\alpha + \theta = \dfrac{\pi}{2}$라는 관계식을 얻을 수 있다.

1. Comprehension에서의 중간값의 정리는 ∞가 나오므로, 이 풀이가 더 고 교 맞는 풀이라 할 수 있다.

point 2

$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$에서 x가 0으로 가까이 갈 때 $\tan x \fallingdotseq x$로 생각하여 푸시는 분이 많을 것이다. 그런데 그 반대로 x가 0으로 가까이 갈 때 $x \fallingdotseq \tan x$라고 생각해도 상관이 없다. 이것을 이용해서

$\dfrac{\pi}{2} - \theta \to 0$, $\dfrac{\pi}{2} - \alpha \to 0$ 이므로,

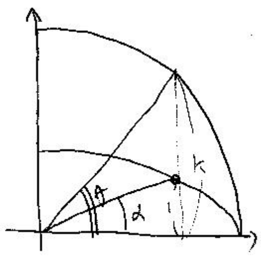
$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\theta}{\dfrac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan\alpha}{\tan\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan\alpha}{k\tan\alpha} = \frac{1}{k}$$

이렇게 빠르게 답을 구할 수도 있다.

하지만, 문제에서 '극한값'을 구하라고 했으므로 구하는 과정까지 채점하겠다는 것을 말한다. 따라서 이렇게 풀게 되면 분명히 감점이 되고, 로피탈의 정리 같은 것을 사용해도 감점이 될 수밖에 없다. 필자 실제 시험장에서 ②문제를 풀 때, 1. Comprehension의 풀이가 떠오르지 않아, point 2에서 설명한 풀이로 답을 먼저 찾은 다음 중간 풀이를 채워나가면서 1. Comprehension의 풀이를 완성했다. 이런 식으로 교과외 과정 먼저 답을 찾은 다음 교과과정에 맞는 풀이를 중간에 채워나가는 방법도 수리논술 문제를 풀 때 하나의 전략이 될 수 있다.

②-3. Actual Fight

<1-2>



1) $k = \tan\alpha : \tan\theta$, $\tan\theta = k\tan\alpha$

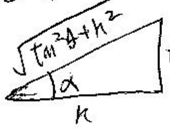
$$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}(k\tan\alpha)$$

$$\frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = k\frac{d}{d\alpha}(\tan\alpha)\frac{d\alpha}{dt},$$

$$\sec^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = k\sec^2\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \rightarrow \sec^2\theta = k\sec^2\alpha$$

에서 $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ 일때 약분하면 $\cos^2\alpha = k\cos^2\theta$ ⋯ ①

$\tan\theta = k\tan\alpha$ 에서



$\cos^2\alpha = \frac{k^2}{\tan^2\theta + k^2}$ 이므로 ①에 대입하면

$(\because 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$

$$\frac{k^2}{\tan^2\theta + k^2} = k\cos^2\theta, \quad k = \sin^2\theta + k^2\cos^2\theta, \quad k = 1 + \cos^2\theta(k^2-1)$$

$\therefore \cos^2\theta = \frac{1}{k+1}$, $f(\theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{k+1}$ 이라 하면

$f(0) = 1 - \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2}$ $\left(\because 0 < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{k+1} < 0$ 에서

$f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ 이므로, 중간값 정리에 의하여 만족하는 θ가 적어도 하나 존재

$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ 일때 $k\cos^2\theta - \cos^2\alpha = 0$ 이므로 $\tan\theta = k\tan\alpha$ 에서

k를 소거하면 $\tan\theta = \left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}\right)\tan\alpha$, $\sin\theta\cos\theta - \sin\alpha\cos\alpha = 0$ 이므로

$\sin 2\theta = \sin 2\alpha \rightarrow \sin 2\theta - \sin 2\alpha = 0$ 에서 $\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha) = 0$

$\therefore \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ or $\theta = \alpha$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1}{k} \quad \left(\because \tan\theta = k\tan\alpha, \ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1\right)$$

③-1. Comprehension

수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ,ㄴ 으로 ㄷ을 풀 듯이 과 ② 내용을 이용해서 <1-3>을 풀어야 한다.

삼각치환하면 $P=(\cos\theta, \sin\theta)$, $Q=\left(\cos\theta, \frac{1}{k}\sin\theta\right)$이므로,

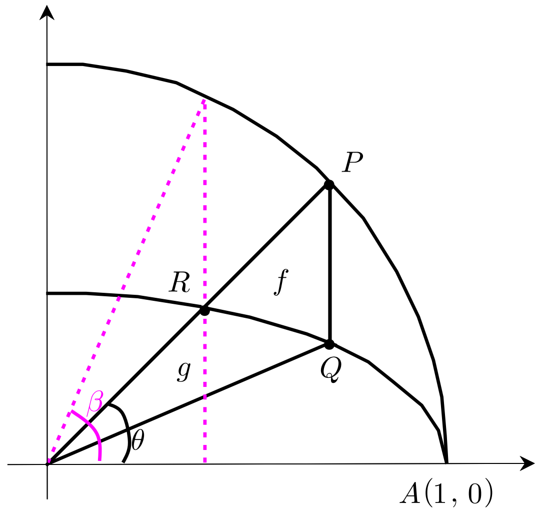
$f+g=\frac{1}{2}(\text{밑변})(\text{높이})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\theta\cos\theta$

그 다음, g의 값을 구해야 하는데 부채꼴의 축소도형인 OAR 에서 또 다른채꼴의 축소도형 OAQ를 빼면 된다.

즉, $g=OAR-OAQ$ 가 된다. $OAQ=\frac{1}{2k}\theta$ 이고,

OAR을 구하기 위해서 붉은색 보조선을 그어 β각을 추가시킨다.
(단, $\tan\beta=k\tan\theta$)

$OAR=\frac{1}{2k}\beta$ 이므로, $g=\frac{1}{2k}(\beta-\theta)$가 된다.



$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(f+g)-g}{g}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\left\{\left(\frac{f+g}{g}\right)-1\right\}$ 에서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f+g}{g}$을 구해보자.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f+g}{g}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\theta\cos\theta}{\frac{1}{2k}(\beta-\theta)}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\sin\theta\cos\theta}{\beta-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan(\beta-\theta)}}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\sin\theta\cos\theta\times\left\{\frac{1+\tan\beta\tan\theta}{\tan\beta-\tan\theta}\right\}}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\sin\theta\cos\theta\times\left\{\frac{1+k\tan^2\theta}{(k-1)\tan\theta}\right\}}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2\theta\times\{1+k\tan^2\theta\}}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2\theta+k\sin^2\theta}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}}=k$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g}=k-1$$

③-2. Point

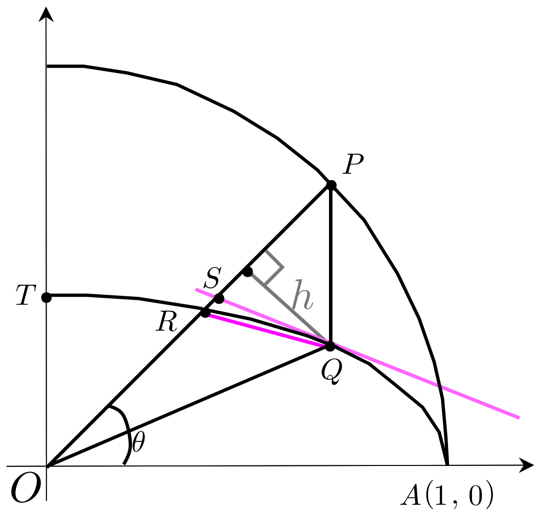
point 1

수리영역의 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제에서 ㄱ,ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이, 앞 문제를 이용해서 다음 문제를 풀 수 있는 논술이 여러 대학에서 출제되고 있으니 앞 문제를 의식하면서 다음문제를 풀도록 해야 한다. 2011 고려대 수리논술의 경우 논제에 '②를 이용해서' 라고 언급 해주었지만 2011 연세대 수리논술 에서는 언급해 주지 않았다. 항상 앞 문제를 의식하는 습관 들여야 한다.

point 2

극한값을 구하는 단순한 문제인데 '로피탈의 정리' 라든지, '부채꼴의 삼각형 근사'를 이용해서 직관으로 풀 수도 있다. 여기서, '로피탈의 정리'는 무조건 감점요인이 되여러 가지 '직관적 풀이'는 적절한 근거를 제시 한다면 괜찮은 점수를 받을 수 있을 것이다. (근거 없는 직관은 무조건 감점이 된다.) 참고로 대부분의 사람들이 부채꼴을 삼각형으로 근사해서 풀었고 당연 많이 감점되었다. 적절한 근거를 제시하면서 직관적으로 풀어 보면,

풀이 1 : 〈함수의 극한의 대소 관계〉



$$g_1 = \triangle OQR = \frac{1}{2}\times\overline{OR}\times h$$

$$g_2 = \triangle OQS = \frac{1}{2}\times\overline{OS}\times h$$

$$f+g = \frac{1}{2}\times\overline{OP}\times h$$

$$g_1 < g < g_2$$

$$\frac{g_1}{f+g} < \frac{g}{f+g} < \frac{g_2}{f+g},$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g_1}{f+g} \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g}{f+g} \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g_2}{f+g}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g_1}{f+g} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\overline{OR} = \frac{1}{k}$$

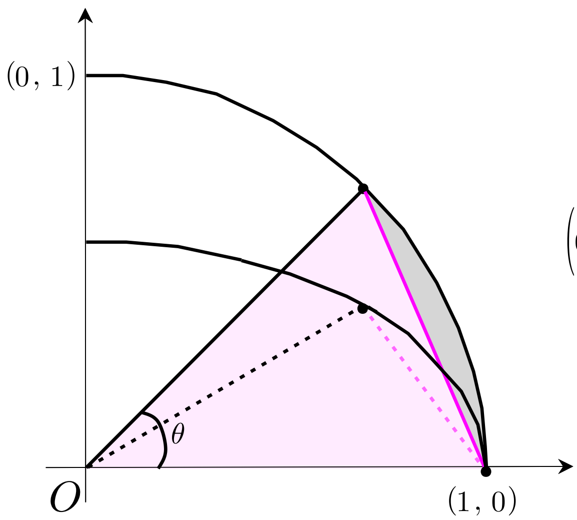
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g_2}{f+g} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\overline{OS} = \frac{1}{k}$$

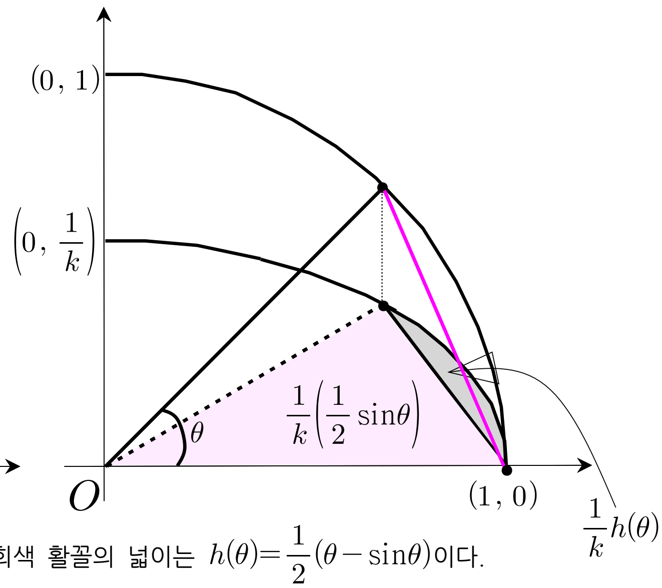
($\because$ $\theta\to\frac{\pi}{2}-0$ 일 때, 점 R $\to$ 점 T , 점 S $\to$ 점 T)

이므로, 함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g}{f+g} = \frac{1}{k}$

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g}{f+g} = \frac{1}{k}$에서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f+g}{g} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\left(1+\frac{f}{g}\right) = k$ 이므로 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g} = k-1$

풀이 2 : 〈활꼴을 무시할 수 있는 근거 제시〉



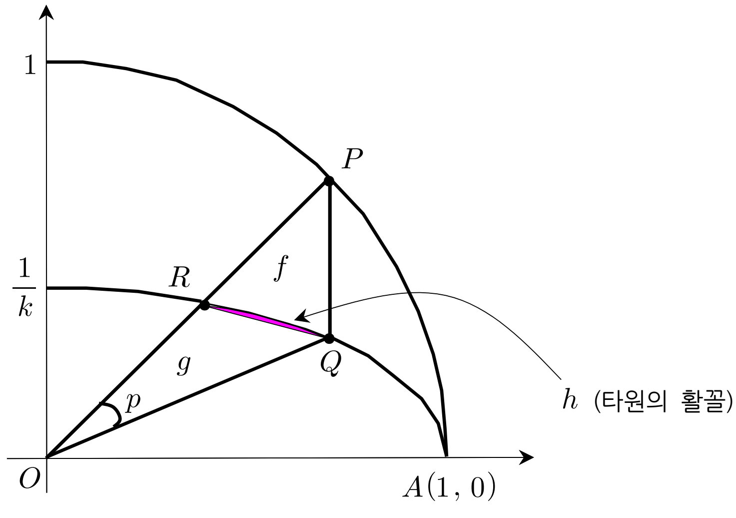


왼쪽 그림에서 분홍삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sin\theta$이고 회색 활꼴의 넓이는 $h(\theta)=\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)$이다.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{h(\theta)}{\frac{1}{2}\sin\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)}{\frac{1}{2}\sin\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}-1\right)=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}-1\right)=0$$ 이고

왼쪽 그래프의 y좌표를 축소한 타원에서 나타나는 삼각형과 활꼴의 축소도형 또한 왼쪽 도형의 $\frac{1}{k}$배이므로 타원의 활꼴에 대해서도 마찬가지의 성질이 타나난다. ⋯ ①

오른쪽 그림처럼 각도를 $\theta-\alpha=p$라 하자. $\theta\to\frac{\pi}{2}-0$이면 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$이므로 $p\to0$이 된다.

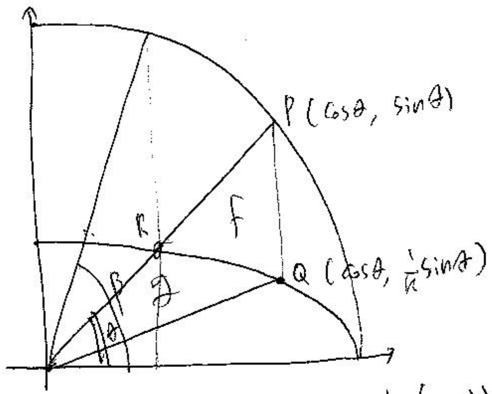


$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g}=\lim_{p\to0}\frac{f}{g}=\lim_{p\to0}\frac{f+h-h}{g-h+h}=\lim_{p\to0}\frac{\frac{f+h}{g-h}-\frac{h}{g-h}}{1+\frac{h}{g-h}}=\lim_{p\to0}\frac{\frac{\triangle RQP}{\triangle OQR}-\frac{h}{g-h}}{1+\frac{h}{g-h}}$$

$$=\lim_{p\to0}\frac{\frac{\overline{RP}}{\overline{OR}}-\frac{h}{g-h}}{1+\frac{h}{g-h}}=\frac{\lim_{p\to0}\frac{\overline{RP}}{\overline{OR}}-\lim_{p\to0}\frac{h}{g-h}}{\lim_{p\to0}(1)+\lim_{p\to0}\frac{h}{g-h}}=\frac{\left(\frac{1-\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\right)-0}{1+0}$$ $(\because$ ①$)=k-1$

③-3. Actual Fight

$\langle 1-3 \rangle$



$$f+g = \frac{1}{2}(\text{밑변})(\text{높이}) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\theta\cos\theta$$

$$g = OAR - OAQ = \frac{1}{2k}\beta - \frac{1}{2k}\theta = \frac{1}{2k}(\beta-\theta)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{f+g}{g}-1\right) \cdots ①$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{f+g}{g}\right) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sin\theta\cos\theta}{\frac{1}{2k}(\beta-\theta)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\sin\theta\cos\theta}{\beta-\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right)}{\left(\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}(k-1)\frac{\sin\theta\cos\theta\times\left\{\frac{1+\tan\beta\tan\theta}{\tan\beta-\tan\theta}\right\}}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}}$$

$$\underset{(\because \tan\beta = k\tan\theta)}{=} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2\theta\times\{1+k\tan^2\theta\}}{\left\{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}\right\}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2\theta+k\sin^2\theta}{\frac{\beta-\theta}{\tan(\beta-\theta)}} = k$$

$$\therefore ① \text{에서} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g} = k-1$$

수리논술 문제 마다 조금씩 다르겠지만 실제 답안지에 한글을 많이 적을 필요가 없다. 한글보다 그래프나 그림을 많이 그려가면서 서술하는 것이 논리적인 답안 작성에 매우 도움이 된다.