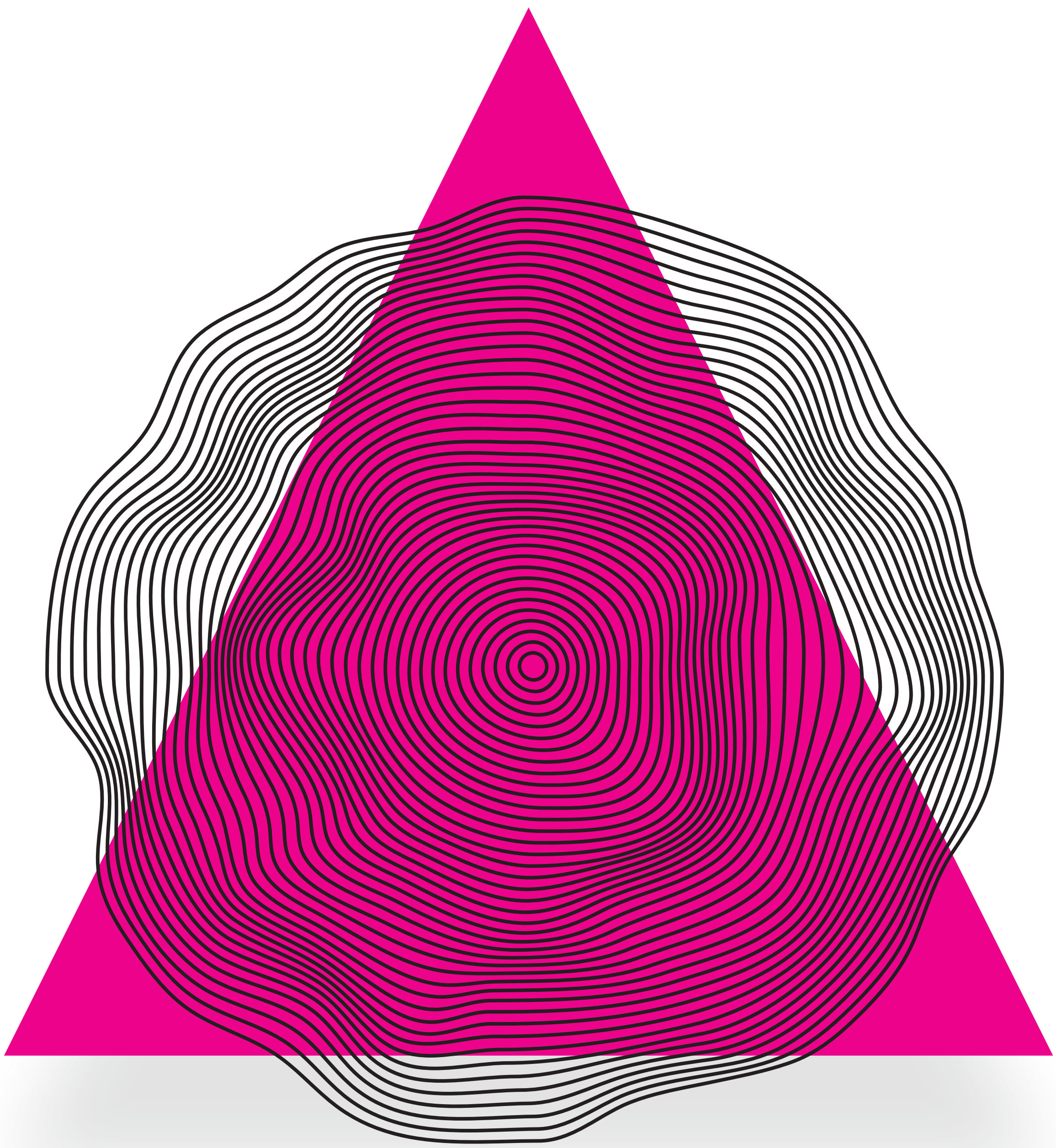
기출의_ 파급효과



수학영역 × 기하 × EXTENSION

기하
EXTENSION
기출의 파급효과

기하

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 기하 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 ‘순서대로’ 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

기하 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 ‘순서대로’ 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 83문제를 담았습니다.

기출의 파급효과 기하의 경우 chapter 5에 알아두면 좋은 교과외 내용도 담겨있습니다. **하지만 chapter 5에 담긴 기출은 모두 교과내입니다.** chapter 5의 기출문제 해설에는 **교과 내의 풀이와 함께** 좌표, 공간벡터 내적, 외적을 활용한 풀이가 첨부되어 있습니다. 따라서 교과 외 내용에 관심이 없더라도 **chapter 5에 속한 기출문제는 다 풀길 바랍니다.**

※ 문제 좌표에서 ‘나형’ 또는 ‘A형’ 또는 ‘인문계’라고 표시된 것을 제외하면 전부 ‘가형’ 또는 ‘B형’ 또는 ‘자연계’ 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 138문제로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 ‘제대로’ 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다.
9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter
02

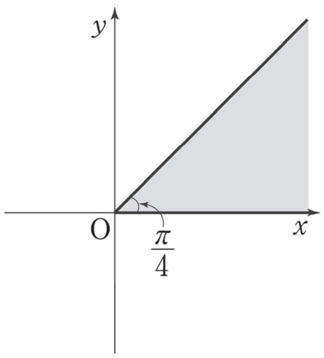
평면벡터

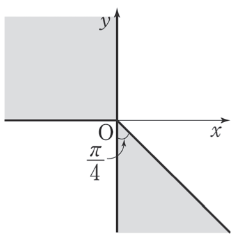
유제

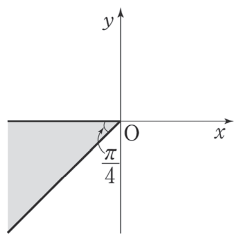
01 04학년도 9월 평가원 12번

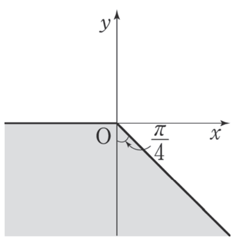
오른쪽 그림의 어두운 영역에 속하는 모든 점 A 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 의 내적이 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \le 0$ 을 만족시키는 점 B 가 있다. 이러한 모든 점 B 의 영역을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은? (단, 어두운 부분의 경계선은 포함한다.)

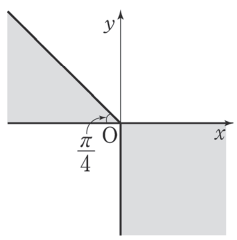
[3점]

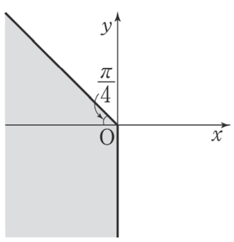


①


②


③


④


⑤


02 07학년도 수능 20번

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F$'$이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

03 09학년도 사관 22번

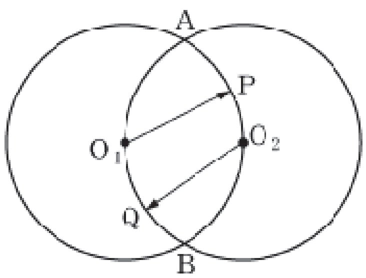
$\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\angle ADB=90^\circ$ 인 평행사변형 ABCD 에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 라 놓는다. 꼭짓점 D 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AE}=k(\vec{a}+\vec{b})$를 만족시키는 실수 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

04 09학년도 9월 평가원 7번

평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]



① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0

④ $\frac{1}{4}$　　⑤ 1

05 10학년도 수능 14번

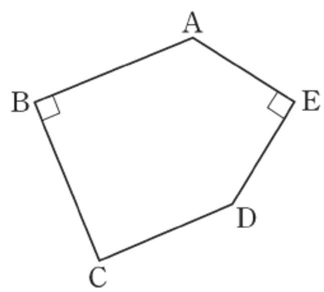
평면에서 그림의 오각형 ABCDE가 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle B = \angle E = 90^\circ$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{BE}|$

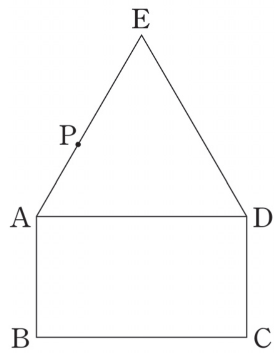


① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 11학년도 9월 평가원 14번

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

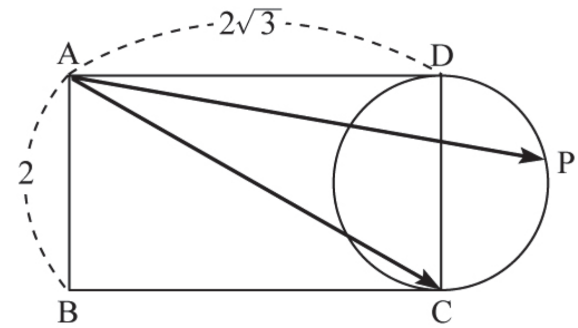
ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 10년 10월 교육청 11번

그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 이 직사각형의 한 변 CD를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은? (단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.) [4점]



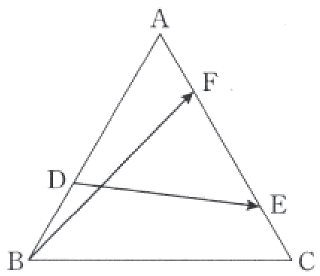
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

08 13학년도 수능 26번

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

09 14학년도 9월 평가원 11번

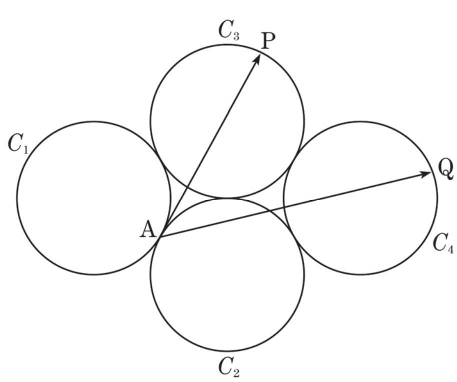
한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3 : 1과 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 E,F라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값은? [3점]



① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

10 13년 10월 교육청 21번

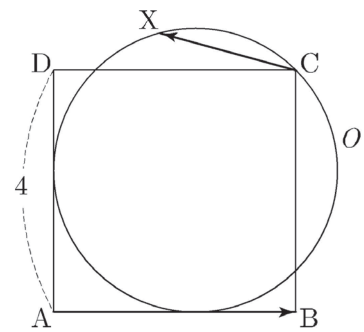
그림과 같이 평면 위에 반지름의 길이가 1인 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4가 서로 외접하고 있고, 두 원 C_1, C_2의 접점을 A라 하자. 원 C_3 위를 움직이는 점 P와 원 C_4 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값은? [4점]



① $4\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ② 6 ③ $3\sqrt{3}+1$ ④ $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ⑤ 7

11 15학년도 사관 29번

한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]



12 17학년도 9월 평가원 16번

직사각형 ABCD의 내부의 점 P가 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

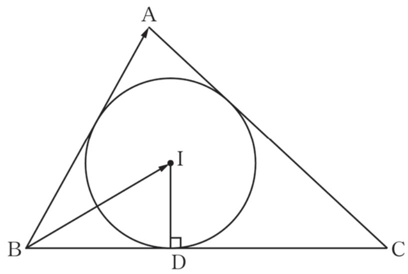
ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13 16년 10월 교육청 25번

그림과 같이 $\overline{AB}=15$인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 I라 하고, 점 I에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{BD}=8$일 때, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$의 값을 구하시오. [3점]



14 18학년도 9월 평가원 19번

좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여

$|\overrightarrow{OX}| \leq 1$ 이고 $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \geq 0$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ 을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_3}$ 이면 D의 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

ㄴ. $\overrightarrow{OA_2}=-\overrightarrow{OA_1}$ 이고 $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_1}$ 이면 D는 길이가 2인 선분이다.

ㄷ. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2}=0$ 인 경우에, D의 넓이가 $\dfrac{\pi}{4}$ 이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15 17년 10월 교육청 10번

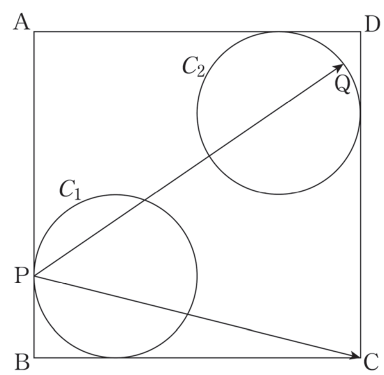
타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $|\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{PF'}|$의 최댓값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

16 17년 10월 교육청 28번

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 선분 AB와 선분 BC에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1과 선분 AD와 선분 CD에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 있다. 원 C_1과 선분 AB의 접점을 P라 하고, 원 C_2 위의 한 점을 Q라 하자. $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$의 최댓값을 $a+\sqrt{b}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



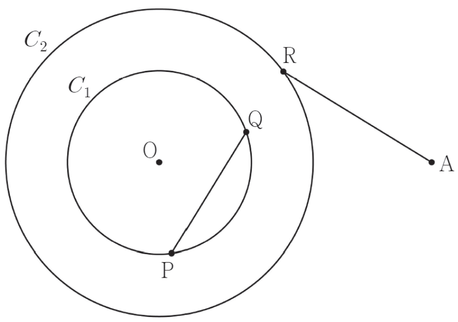
17 18년 7월 교육청 29번

그림과 같이 평면 위에 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{11}$을 만족하는 두 점 O, A와 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{5}$, $\sqrt{14}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 원 C_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 원 C_2 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양수 k에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ (나) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{AR}}=2:\sqrt{6}$

원 C_1 위의 점 S에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

(단, $\frac{\pi}{2}<\angle\mathrm{ORA}<\pi$) [4점]



18 19년 7월 교육청 29번

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다.

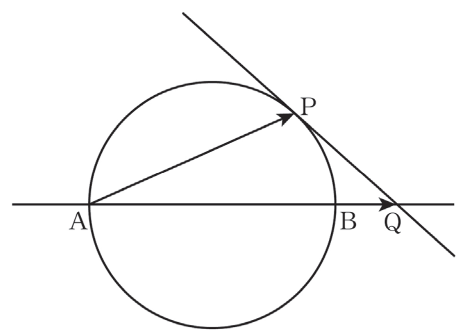
양수 x에 대하여 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가

$$x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

를 만족시킨다. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자. $50S$의 값을 구하시오. [4점]

19 19년 10월 교육청 27번

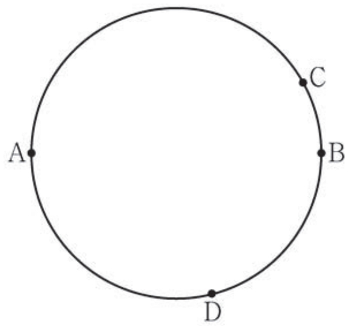
그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에서의 접선과 직선 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q가 선분 AB를 5 : 1로 외분하는 점이고, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{3}$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값을 구하시오. [4점]



20 20학년도 수능 19번

한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{AD}|^2$의 값은? [4점]

(가) $\|\overrightarrow{AB}\|=8$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (나) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$



① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

21 22학년도 예비시행 기하 24번

좌표평면에서 점 A(4, 6)과 원 C 위의 임의의 점 P에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=3$$

일 때, 원 C의 반지름의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

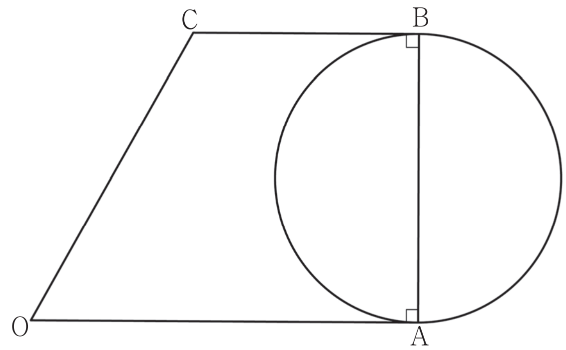
22 21년 7월 교육청 기하 30번

평면 위에

$$\overline{OA}=2+2\sqrt{3},\ \overline{AB}=4,\ \angle COA=\frac{\pi}{3},$$

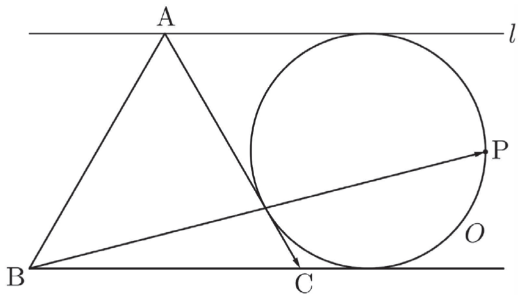
$$\angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 D라 하자. 원 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]



23 22학년도 사관 기하 27번

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [3점]



① 46　② 47　③ 48　④ 49　⑤ 50

24 22학년도 사관 기하 30번

좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(6, 5)와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$이고
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\le 21$이다.

(나) $|\overrightarrow{AQ}|=|\overrightarrow{AB}|$이고
$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}\le 21$이다.

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

25 21년 10월 교육청 기하 28번

삼각형 ABC와 삼각형 ABC의 내부의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$, $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|}=3$

(나) $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$
$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|=-2|\overrightarrow{PC}|^2$

직선 AP와 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{PD}$이다. 실수 k의 값은? [4점]

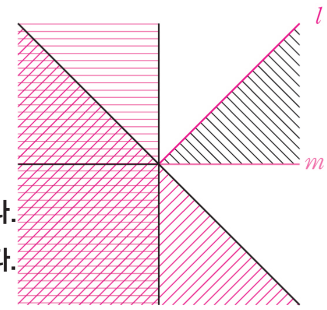
① $\frac{11}{2}$　② 6　③ $\frac{13}{2}$　④ 7　⑤ $\frac{15}{2}$

CHAPTER

02 해설

01 04학년도 9월 평가원 12번

답 : ⑤



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \le 0$이기 위해선 두 벡터가 이루는 각의 크기가

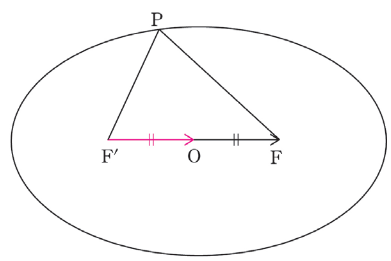
$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3}{2}\pi$여야 한다. 경곗값들을 잘 따져보자.

$\overrightarrow{OA}$가 직선 l 위에 존재하면 점 B는 대각선으로 빗금 친 영역에 존재한다.
$\overrightarrow{OA}$가 직선 m 위에 존재하면 점 B는 수평선으로 빗금 친 영역에 존재한다.

어두운 영역에 속하는 모든 점 A에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \le 0$을 만족시키려면 점 B는 공통으로 빗금 친 영역에 있어야 한다.

02 07학년도 수능 20번

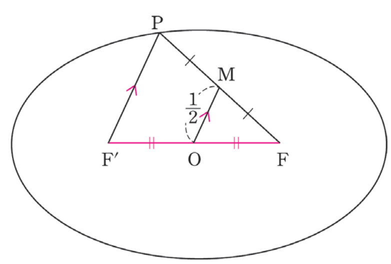
답 : 15



1. **벡터 평행이동을 이용하면 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{F'O}$이다.**
   따라서 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{F'O} = \overrightarrow{F'P}$이므로 $|\overrightarrow{F'P}| = 1$이다.

2. 타원의 장축의 길이는 4이므로 $\overline{PF} = 4 - 1 = 3$이다.
   따라서 $k = 3$이므로 $5k = 15$이다.

※ 중점연결정리 이용한 풀이



1. **점 O, 점 P, 점 F는 정점이다. $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 1$를 간소화하기 위해 Chapter 2에서 배운 대로 점 A와 점 B의 중점 M을 이용하자. $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 2 \times |\overrightarrow{OM}|$이므로 $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}$이다.**

2. $\triangle PFF'$**에서 $\overline{OF} = \overline{OF'}$, $\overline{MF} = \overline{PM}$이므로 $\overline{MO} // \overline{PF'}$, $\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{PF'}$이다. (∵ 중점연결정리)**

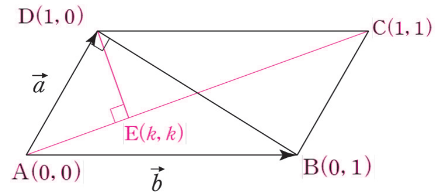
   $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}$이므로 $\overline{PF'} = 1$이다. 타원의 장축의 길이는 4이므로 $\overline{PF} = 4 - 1 = 3$이다.

   따라서 $k = 3$이므로 $5k = 15$이다.

03 09학년도 사관 22번

답 : ②

1. 삐꾸 좌표계를 도입해보자. 삐꾸 좌표계에서 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, 점 $\mathrm{B}(0, 1)$, 점 $\mathrm{C}(1,\ 1)$, 점 $\mathrm{D}(1,\ 0)$이라 하자.
   삐꾸 좌표계에서 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1)$이고,
   $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(k,\ k)$에서 점 $\mathrm{E}(k,\ k)$이다.



   삐꾸 좌표계에서 점 $\mathrm{A}(0, 0)$**, 점** $\mathrm{E}(k,\ k)$**이므로** $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(k, k)$**이다.**
   삐꾸 좌표계에서 점 $\mathrm{D}(1,\ 0)$**, 점** $\mathrm{E}(k,\ k)$**이므로** $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(k-1, k)$**이다.**

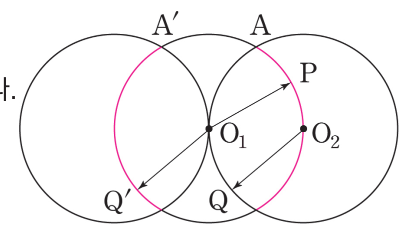
2. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(k, k)$**를 직교 좌표계의 벡터로 변환하면** $k\vec{a}+k\vec{b}$**이다.**
   $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(k-1, k)$**를 직교 좌표계의 벡터로 변환하면** $(k-1)\vec{a}+k\vec{b}$**이다.**

   $|\vec{a}|^2=1,\ |\vec{b}|^2=6,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=k(\vec{a}+\vec{b})\cdot((k-1)\vec{a}+k\vec{b})=0$이다.
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=k(k-1)+k^2+k(k-1)+6k^2=9k^2-2k=0$이므로 $k=\dfrac{2}{9}$이다.

04 09학년도 9월 평가원 7번

답 : ②

1. **점** O_1**, 점** O_2**는 정점이고 점** P**, 점** Q**는 동점이다.**
   $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$를 구하려고 했더니 시점이 달라서 접근하기 힘들다.
   $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$의 시점을 점 O_1으로 통일시켜주자.



   $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}$ 이다.

2. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{O_1Q'}}=\cos\theta$이다.
   $\cos\theta$의 최댓값과 최솟값을 구해보자.

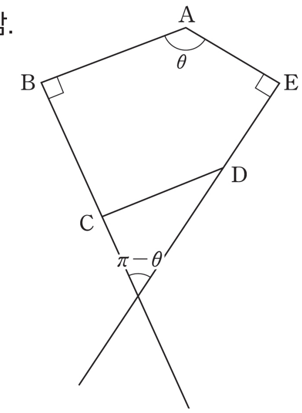
   (1) $\cos\theta=M$ 일 때
   점 P가 점 A, 점 Q'이 점 A'에 위치하면 된다.
   따라서 두 벡터가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$이므로 $M=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$이다.

   (2) $\cos\theta=m$일 때
   두 벡터의 방향이 반대이면 된다.
   따라서 두 벡터가 이루는 각의 크기는 π이므로 $m=\cos\pi=-1$이다.

   $M+m=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$이다.

05 10학년도 수능 14번

답 : ⑤



1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 평행하다. 선지 (ㄱ)은 참.

2. $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면,
   $\overrightarrow{BC}$와 $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이다.
   따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ 이다. 선지 (ㄴ)은 참.

3. **ㄱㄴㄷ flow에 따라 선지 (ㄱ), 선지 (ㄴ)에서 알아낸 정보를 최대한 적극적으로 이용하자.** 이를 활용하기 위해서 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$로 두자.

   $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$임을 보이기 위해서는 $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2$을 보이면 된다.
   $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{ED}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ $|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AE}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$

   $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$이고, 선지 (ㄴ)의 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$을 활용하면
   $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2$임을 알 수 있다. 선지 (ㄷ)은 참.

06 11학년도 9월 평가원 14번

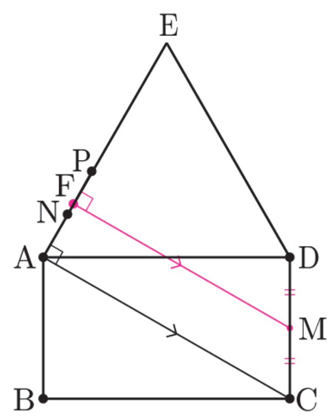
답 : ⑤

1. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}|\geq|\overrightarrow{AB}|=1$이다.
   따라서 $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$는 점 P가 점 A에 위치할 때 최솟값 1을 갖는다. 선지 (ㄱ)은 참.

2. $\angle CAD=\frac{\pi}{6}$, $\angle DAP=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle CAP=\frac{\pi}{2}$이다.
   따라서 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{CA}|^2=4$로 일정하다. 선지 (ㄴ)은 참.

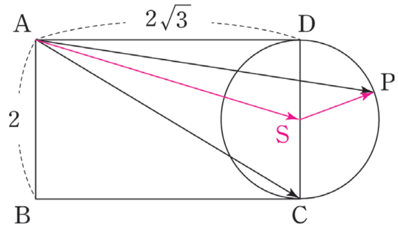
3. $\overline{CD}$의 중점을 M, $\overline{AP}$의 중점을 N이라 하자.
   $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|=2\times|\overrightarrow{MN}|$이다. $|\overrightarrow{MN}|$의 최솟값은
   점 M에서 $\overline{AE}$까지의 거리와 같으므로,
   점 M에서 $\overline{AE}$에 내린 수선의 발을 F라 하면
   점 N이 점 F에 위치할 때 $|\overrightarrow{MN}|$은 최솟값을 갖는다.

   $\overline{MF}=\overline{AC}-\overline{MC}\cos\frac{\pi}{3}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$이므로
   $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|=2\times|\overrightarrow{MN}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다. 선지 (ㄷ)은 참.



07 10년 10월 교육청 11번

답 : ④



1. $\overline{\mathrm{CD}}$를 지름으로 하는 원의 중심을 점 S라 하자.
점 A, 점 C는 정점이고 점 P는 동점이다.
원의 중심 S를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$**를 쪼개면**
$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{SP}})$**이다.** $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}$**는 고정값을 갖는다.**
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SP}}$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$도 최대이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{SP}}|$**는 원의 반지름의 길이로 일정하다.** $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$**는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에** $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$**와 어떤 각이 든 이룰 수 있다.** 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SP}}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{SP}}$가 이루는 각이 $0°$ 이면 된다.
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{SP}}) \leq \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{SP}}|$이다.

2. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}$**에서 점 A, 점 C, 점 S는 모두 정점이므로 좌표를 잡고 계산하는 것이 편리하다.**
점 B를 원점으로 잡으면 각각의 점들의 좌표는 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{C}(2\sqrt{3},0)$, $\mathrm{S}(2\sqrt{3},1)$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2\sqrt{3},-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=(2\sqrt{3},-1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}=14$이다.
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{SP}}|=4\times1=4$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} \leq \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{SP}}|=14+4=18$이다.

08 13학년도 수능 26번

답 : 7

1. **점 A, 점 B는 정점이고 점 P는 동점이다.** $\overline{\mathrm{AB}}$ **중점 M을 거쳐** $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$**를 쪼개면**
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$**이다.**
$|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$**은 고정값을 가지므로** $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$도 최대이다.
하지만 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$**의 최대가** $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}|$**의 최대가 아니다.**

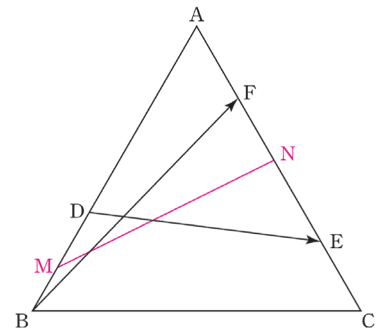
2. 점 B에서 $\overline{\mathrm{AH}}$에 내린 수선의 발은 점 H이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}}|$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PH}}$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3}-a$이다.
따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PH}}=a\times(\sqrt{3}-a)$ 에서 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 최댓값 $\dfrac{3}{4}$을 얻는다.
$p=4$, $q=3$이다.

※ $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최대가 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최대가 아님에 유의하자.

09 14학년도 9월 평가원 11번

답 : ③



1. **점** B, **점** D, **점** E, **점** F**는 모두 정점이다.**

   중점을 거쳐 $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$**을 쪼개보자.**

   $\overline{\mathrm{BD}}$**의 중점을** M, $\overline{\mathrm{EF}}$**의 중점을** N**이라 하면**

   $\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$**이다.**

   따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=4\times|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2$ 이다.

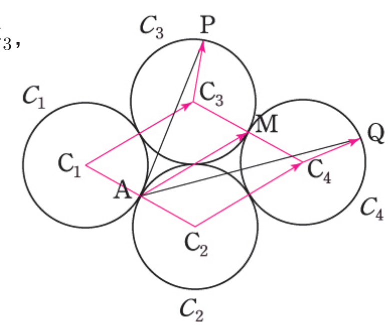
2. $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로

   $4\times|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=4\times\left|\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\left|\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\left|25+9+\dfrac{10}{3}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})\right|$

   $=\left|34+\dfrac{10}{3}\times3\times3\times\cos\dfrac{2\pi}{3}\right|=34-15=19$이다.

10 13년 10월 교육청 21번

답 : ②



1. 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 점 $\mathrm{C_1}$, 점 $\mathrm{C_2}$, 점 $\mathrm{C_3}$, 점 $\mathrm{C_4}$라 하자. **점** A**는 정점이고 점** P, **점** Q**는 동점이다.**

   원의 중심들을 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$**를 쪼개면**

   $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}+\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}$**이다.**

   $|\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}|$**는 원의 반지름의 길이로 일정하다.** $\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}$**는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에** $\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}$**와 어떤 각이든 이룰 수 있다.** 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}+\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}+\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}|$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}$가 각각 $\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}$가 이루는 각이 $0°$ 이면 된다.

2. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}+\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}$이므로 $\overline{\mathrm{C_3C_4}}$의 중점을 점 M이라 한다면

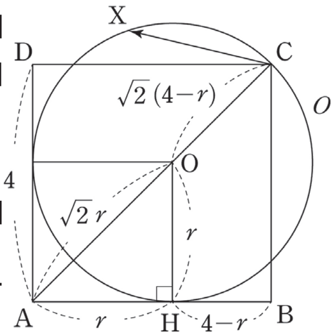
   $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{C_3P}}+\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}+\overrightarrow{\mathrm{C_4Q}}|\leq|\overrightarrow{\mathrm{AC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{AC_4}}|+2=2|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|+2$이다.

   한편, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{C_1C_3}}=\overrightarrow{\mathrm{C_2C_4}}$이므로 $2|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|+2=6$이다.

11 15학년도 사관 29번

답 : 80

1. 원의 반지름의 길이를 먼저 구하자. 원 O의 중심을 점 O, 원과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 접점을 점 H라 하자. 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=4$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=r$, $\overline{\mathrm{HB}}=4-r$이다.



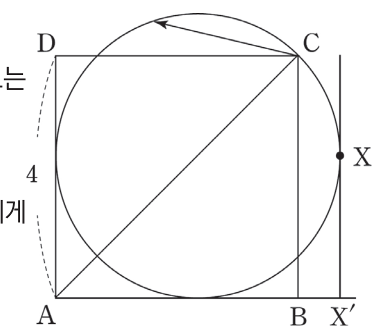
   $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$에서 $\overline{\mathrm{AO}}=\sqrt{2}r$, $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}(4-r)$이다. 한편 $\overline{\mathrm{OC}}$는 원의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}(4-r)=r$에서 $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=8-4\sqrt{2}$이다.

2. **점 A, 점 B, 점 C는 정점이고 점 X는 동점이다. 원 O의 중심 O를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$를 쪼개면 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}})$이다. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}$는 고정값을 갖는다.**
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$도 최대이다.

   $|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$는 원의 반지름의 길이로 일정하다. $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 어떤 각이든 이룰 수 있다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$가 이루는 각이 $0°$이면 된다.
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}})\le\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$이다.

3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}})\le-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$
   $=-4\times(4-r)+4r=8r-16=8\times(r-2)=8\times(6-4\sqrt{2})=48-32\sqrt{2}$이다.
   따라서 $a=48$, $b=32$이므로 $a+b=80$이다.

※ 벡터 정사영 이용
굳이 $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$를 $\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}$로 분해하지 않아도 괜찮다.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$에서 점 C와 점 X를 직선 AB에 정사영하여 생각해보는 것도 하나의 방법이다.



점 C를 직선 AB에 정사영하면 점 B가 되고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$가 최대가 되게 하는 점 X는 그림과 같음을 직관적으로 알 수 있다.

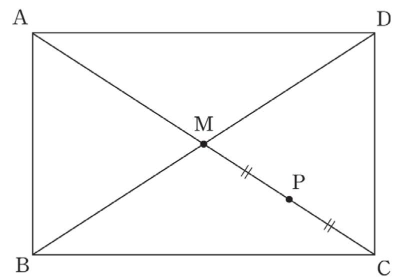
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}\le|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BX'}}|=4\times(2r-4)=4\times(12-8\sqrt{2})=48-32\sqrt{2}$이다.

12 17학년도 9월 평가원 16번

답 : ⑤

1. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$**에서** $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$**의 시점을 점** P**로 맞춰주자.**
   $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PC}}$로 바꿔주고 식을 정리하면 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2\overrightarrow{\mathrm{CP}}$이다. 선지 (ㄱ)은 참.

2. 직사각형의 대각선의 교점을 점 M이라 하자.
   점 M은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이고, 동시에 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이다.

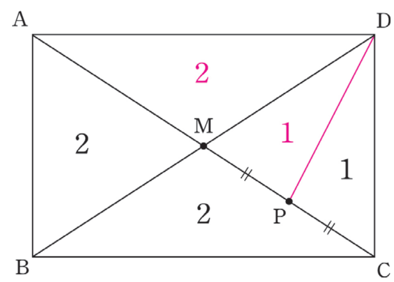


   따라서 선지 (ㄱ)에 의해 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2\overrightarrow{\mathrm{PM}}=2\overrightarrow{\mathrm{CP}}$이므로
   $\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}$이므로 점 P는 $\overline{\mathrm{CM}}$의 중점이다.

   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이다. 선지 (ㄴ)은 참.

   ※ $\overline{\mathrm{AC}}, \overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 점 M으로 같으므로
   $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}})+(\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}})=4\overrightarrow{\mathrm{PM}}$이다.
   $4\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}$이므로 점 P는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $3:1$로 내분하는 점이다.

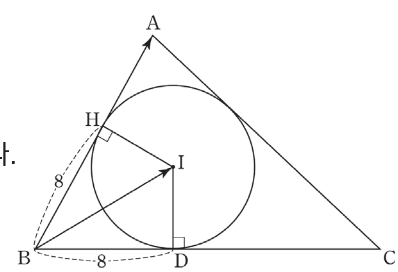
3. $\overline{\mathrm{AM}}=2\overline{\mathrm{MP}}$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는 다음과 같다.



   따라서 넓이가 8이므로 선지 (ㄷ)은 참.

13 16년 10월 교육청 25번

답 : 120



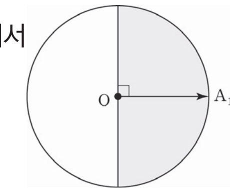
원의 중심과 접점을 잇고 직각 표시를 해주자.
점 I에서 $\overline{\mathrm{BA}}$에 내린 수선의 발을 점 H라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BD}}=8$이다.
벡터 정사영을 이용하면 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}$**이다.**

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=15\times 8=120$이다.

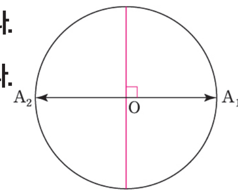
14 18학년도 9월 평가원 19번

답 : ⑤

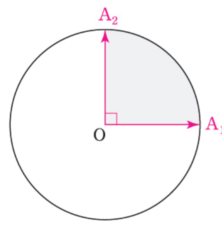
1. 두 벡터 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OA_k}$가 이루는 각의 크기를 θ_k라 하면 $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_k} \geq 0$에서 $\cos\theta_k \geq 0$이다. 따라서 $0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2}$ 이다. $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3}$에서 D가 나타내는 영역은 오른쪽과 같은 반원이다. 따라서 선지 (ㄱ)은 참.



2. $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1}$**에서** $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_2} \geq 0$**는 곧** $-\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_1} \geq 0$**이다.**
$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_1} \geq 0$, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_2} \geq 0$**를 모두 만족하려면** $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_1} = 0$**이어야 한다.**
따라서 D**는** $\overline{OA_1}$**에 수직인 점들의 모임이어야 한다.**
원의 지름은 2이므로 선지 (ㄴ)은 참.



3. $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = 0$ **일 때,** $\overline{OA_1} \perp \overline{OA_2}$**이다.**
$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_1} \geq 0$, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OA_2} \geq 0$**를 모두 만족하려면** D**는 부채꼴** A_1OA_2**에 포함되어야 한다.** 부채꼴 A_1OA_2의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이다.
따라서 D**의 넓이가** $\frac{\pi}{4}$ **이면** D**는 부채꼴** A_1OA_2**이어야 하고,**
이를 만족하려면 점 A_3가 $\overparen{A_1A_2}$위에 있어야 한다. 선지 (ㄷ)은 참.



15 17년 10월 교육청 10번

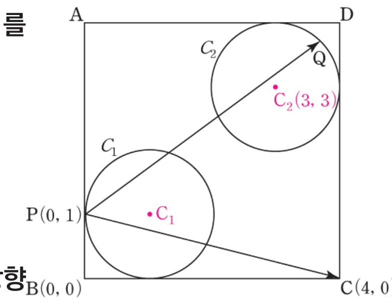
답 : ②

점 F, **점** F'**는 정점이고 점** P**는 동점이다.** $|\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'}|$**를 간소화하기 위해 Chapter 2에서 배운 대로 점** F**와 점** F'**의 중점인 원점** O**를 이용하자.**

$\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'} = 2\overrightarrow{PO}$이다. $|\overrightarrow{PO}|$가 최댓값을 가지려면 점 P는 타원의 장축 위에 존재하면 된다.
장축의 길이는 6이므로 $2|\overrightarrow{PO}| = 6$이다.

16 17년 10월 교육청 28번

답 : 27



1. **점 P, 점 C는 정점이고 점 Q는 동점이다. 원 C_2의 중심 $\mathrm{C_2}$를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 쪼개면 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{PC_2}} + \overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}\right)$이다.**
   $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC_2}}$는 고정값을 갖는다.
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$도 최대이다.

   $\left|\overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}\right|$는 원의 반지름의 길이로 일정하다. $\overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}$는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$와 어떤 각이든 이룰 수 있다.
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}$가 이루는 각이 $0°$ 이면 된다.
   따라서 $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{PC_2}} + \overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}\right) \leq \overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC_2}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}\right|$이다.

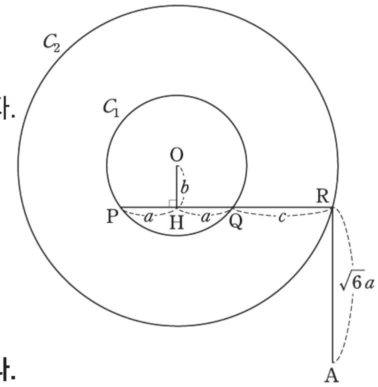
2. **$\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC_2}}$에서 점 P, 점 C, 점 $\mathrm{C_2}$는 모두 정점이므로 좌표를 잡고 계산하는 것이 편리하다.**
   점 B를 원점으로 잡고, 점 P의 좌표를 $(0, 1)$, 점 C의 좌표를 $(4, 0)$으로 설정하면
   점 $\mathrm{C_2}$의 좌표는 $(3, 3)$이다.

   $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = (4, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PC_2}} = (3, 2)$이므로
   $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC_2}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{C_2Q}}\right| = (4, -1) \cdot (3, 2) + \sqrt{17} = 10 + \sqrt{17}$이다.
   $a = 10$, $b = 17$이다.

17 18년 7월 교육청 29번

답 : 486

1. 조건 (가)에 의해 세 점 P, Q, R은 한 직선 위에 있고,
조건 (나)에 의해 $\overline{\mathrm{AR}} \perp \overline{\mathrm{PR}}$이다.
문제에 그림을 줬지만, 눈에 더 잘 들어오도록 그림을 새로 그리자.



오른쪽과 같이 그림을 그리면 수직 조건이 눈에 더 잘 들어온다.
무엇보다 그림을 새로 그리게 되면서 **점 A, 점 R은 정점이고 점 S는 동점임을 눈치챌 수 있다.**

원의 중심 O를 거쳐 $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}$**를 쪼개면** $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}})$**이다.**
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}}$**는 고정값을 갖는다.** 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 최대일 때 $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}}$도 최대이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|$**는 원 C_1의 반지름의 길이로 일정하다.** $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$**는 자유로운 방향을 지닌 벡터이기에** $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$**과 어떤 각이든 이룰 수 있다.** 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 이루는 각이 $0°$이면 되고, 최소이기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 이루는 각이 $180°$이면 된다.

2. $\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}})$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}| = \sqrt{5}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \sqrt{5} \times |\overrightarrow{\mathrm{AR}}| \leq \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} \leq \overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \sqrt{5} \times |\overrightarrow{\mathrm{AR}}|$ 이다.

이제, 각각의 길이를 표현해보자.
점 O에서 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 내린 수선의 발을 점 H라 하자.

편의상 $\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{HQ}} = a$, $\overline{\mathrm{QH}} = b$, $\overline{\mathrm{QR}} = c$, $\overline{\mathrm{AR}} = \sqrt{6}a$라 하면,
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \sqrt{6}a \times (\sqrt{6}a + b) = 6a^2 + \sqrt{6}ab$이다. a와 b를 구해보자.

피타고라스 정리에 의하여 $a^2 + b^2 = 5$, $(a+c)^2 + b^2 = 14$, $(a+c)^2 + (\sqrt{6}a + b)^2 = 44$이다.
$(\sqrt{6}a + b)^2 - b^2 = 6a^2 + 2\sqrt{6}ab = 30$, $6(a^2 + b^2) = 30$이므로
$2\sqrt{6}ab - 6b^2 = 0$이고, $b = \dfrac{\sqrt{6}a}{3}$이다.
따라서 $a^2 + b^2 = a^2 + \dfrac{2}{3}a^2 = 5$에서 $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$이다.

$\overline{\mathrm{AR}} = \sqrt{6}a = 3\sqrt{2}$이므로,
$\overrightarrow{\mathrm{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} = 6a^2 + \sqrt{6}ab = 18 + 6 = 24$, $\sqrt{5} \times |\overrightarrow{\mathrm{AR}}| = 3\sqrt{10}$이다.

$M = 24 + 3\sqrt{10}$, $m = 24 - 3\sqrt{10}$이므로 $Mm = 24^2 - 90 = 576 - 90 = 486$이다.

18 19년 7월 교육청 29번

답 : 60

1. $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$이다. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$가 최대인 상황을 알아보자.
$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{OC}$이므로 양변을 제곱하면 $x^2+25+10x\times\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9$에서
$x>0$**이므로 산술 • 기하 평균의 관계에 의하여** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{-x^2-16}{10x}=-\dfrac{1}{10}\left(x+\dfrac{16}{x}\right)\le-\dfrac{4}{5}$**이다.**
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값은 $x=4$일 때, $-\dfrac{4}{5}$이다.

2. $4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$에서 $4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OC}=-5\overrightarrow{OB}$이므로 양변을 제곱하면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$을 얻는다. 마찬가지로 $5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=-4\overrightarrow{OA}$의 양변을 제곱하면 $34+30\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=16$이므로 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\dfrac{3}{5}$을 얻는다.

3. $S=\triangle OAB+\triangle OAC+\triangle OBC=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{5}+1+\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{6}{5}$이다. 따라서 $50S=60$.

※ 다른 풀이

$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{OC}$이므로 $|x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$에서 $x^2+25+10x\times\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9$이다.

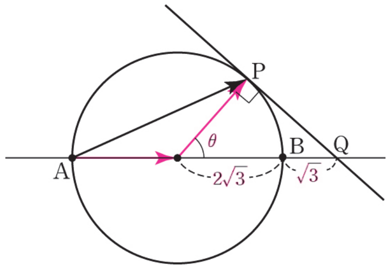
x에 대한 이차방정식 $x^2+10\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}x+16=0$이 양의 실근을 가져야 한다.
실근을 갖기 위해서 $100(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2\ge64$이어야 하고,
양의 실근을 갖기 위해서 근과 계수의 관계를 고려하면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$이어야 한다.

그러므로 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값은 $-\dfrac{4}{5}$이고 이때 주어진 이차방정식은 $x^2-8x+16=0$이므로 $x=4$이다.

19 19년 10월 교육청 27번

답 : 50

원의 중심을 점 O라 하자.
원의 중심 O와 접점 P를 잇고 직각 표시를 하자.



$|\overrightarrow{BQ}|=\sqrt{3}$이므로 $|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{3}$이다.

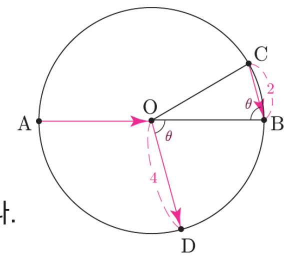
$\angle POB=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$이다.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\dfrac{5}{3}\overrightarrow{OQ}=2\sqrt{3}\times5\sqrt{3}+\dfrac{5}{3}(2\sqrt{3})^2=50$이다.

20 20학년도 수능 19번

답 : ⑤

1. **조건 (가)에서 점 C의 자취는 $\overline{\mathrm{AB}}$가 지름인 원임을 알 수 있다.**



2. 조건 (나)를 해석하자. 원의 중심을 점 O라고 하면
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$에서 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$는 평행하다. 따라서 $\angle\mathrm{CBO}=\angle\mathrm{DOB}$이다.

3. $\angle\mathrm{CBO}=\angle\mathrm{DOB}=\theta$라 하자. $\triangle\mathrm{OBC}$는 이등변삼각형이므로 $\cos\theta=\frac{1}{4}$이다.

코사인법칙을 이용하면 $\overline{\mathrm{AD}}^2=4^2+4^2-2\cdot4\cdot4\cdot\cos(\pi-\theta)=32+8=40$이다.

21 22학년도 예비시행 기하 24번

답 : ④

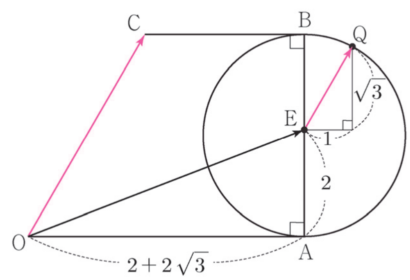
1. 주어진 식을 정리하면 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3$이다.

2. 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y)\cdot(x-4,\ y-6)=x(x-4)+y(y-6)=3$이므로
$(x-2)^2+(y-3)^2=16$이다. 따라서 원 C의 반지름의 길이는 4이다.

22 21년 7월 교육청 기하 30번

답 : 108

1. **선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.**



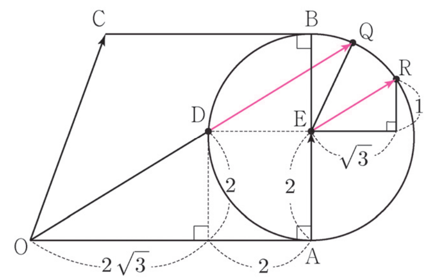
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EP}})=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{EP}}$가 방향이 같을 때 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는
최댓값을 갖는다. 그때의 점 P가 Q이므로 점 Q를 표시하자.

$\angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{3}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{EQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기도 $\frac{\pi}{3}$이다.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|=2$이므로 점 O를 원점으로 생각하고, 직선 OA를 x축으로 생각하자.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2+2\sqrt{3},\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(0,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=(1,\ \sqrt{3})$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(3+2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$이다.

따라서 직선 OQ의 기울기는 $\frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\angle\mathrm{QOA}=\frac{\pi}{6}$이다.

2. 점 D는 $\overline{\mathrm{OQ}}$ 위의 점이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.



$\overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{ER}}) = \overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ER}}$

이므로 **$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{ER}}$의 방향이 같을 때**

$\overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}}$는 최댓값을 갖는다. 그때의 점 R를 표시하자.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{ER}}| = 2$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{ER}} = (\sqrt{3},\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{ER}} = (0,\ 2) + (\sqrt{3},\ 1) = (\sqrt{3},\ 3)$ 이다.

한편 $\angle\mathrm{DOA} = \frac{\pi}{6}$ 이고 원의 반지름의 길이가 2 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (2\sqrt{3},\ 2)$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EQ}} = (2,\ 0) + (1,\ \sqrt{3}) = (3,\ \sqrt{3})$에서

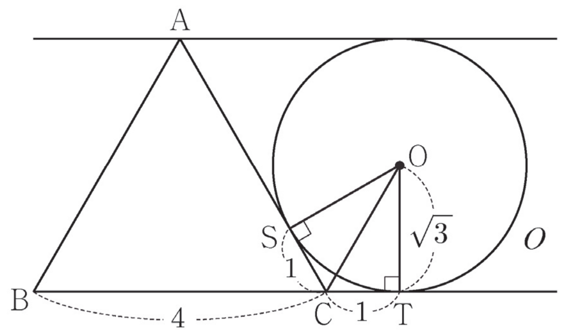
$\overrightarrow{\mathrm{DQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AR}} = (3,\ \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3},\ 3) = 6\sqrt{3}$ 이므로 $M^2 = (6\sqrt{3})^2 = 108$ 이다.

23 22학년도 사관 기하 27번

답 : ④

1. 원 O의 중심을 O라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}|$에서 점 A, B, C는 정점이고 점 P는 동점이다. **$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$를 원 O의 중심 O를 거쳐 쪼개자.** $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 이므로 $M = |\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$, $m = |\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}}| - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ 이다.

2. $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$이라 하자. $\mathrm{A}(2,\ 2\sqrt{3})$이므로 점 O의 y좌표는 $\sqrt{3}$ 이다. **새 부리를 닮은 내접원 꼴이 보인다. 반사적으로 원의 중심 O에서 선분 AC, BC에 수선의 발을 내려주고 직각을 표시하자.**



원 O와 선분 AC의 접점을 S, 직선 BC와의 접점을 T라 하면 $\overline{\mathrm{CS}} = \overline{\mathrm{CT}}$이다.

이때, 점 O에서 직선 AC까지의 거리는 $\sqrt{3}$ 이고,

$\angle\mathrm{OCA} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{TCA} = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CS}} = 1$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{CT}} = 1$ 이므로 $\mathrm{O}(5,\ \sqrt{3})$이다.

3. $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{\mathrm{BO}} = (5,\ \sqrt{3})$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}} = (7,\ -\sqrt{3})$이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BO}}| = \sqrt{7^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$에서

$M = 2\sqrt{13} + \sqrt{3}$, $m = 2\sqrt{13} - \sqrt{3}$ 이므로 $Mm = 52 - 3 = 49$ 이다.

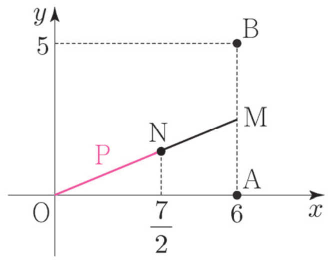
24 22학년도 사관 기하 30번

답 : 37

1. 선분 AB의 중점을 M이라 하자. 음이 아닌 실수 k에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

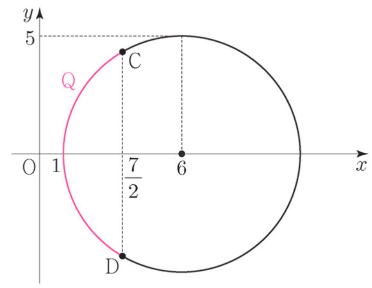
이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$은 방향이 같다.



점 P의 x좌표를 a라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6a\le 21$이므로

$0\le a\le \frac{7}{2}$이다. $x=\frac{7}{2}$일 때, 점 P를 N이라 하면 점 P의 자취는 선분 ON이다.

2. $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$이므로 점 Q는 점 A$(6,0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.



이때, 점 Q의 x좌표를 b라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$에서

$1\le b\le 11$이고, 조건 (나)에서 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6b\le 21$이므로

$1\le b\le \frac{7}{2}$이다.

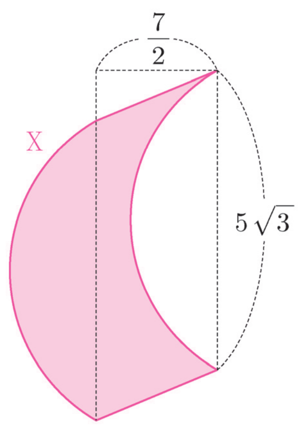
직선 $x=\frac{7}{2}$과 점 A$(6,0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원의 두 교점을 각각 C, D라 하면 점 Q의 자취는 점 B를 포함하지 않은 호 CD이다.

이때, 원의 방정식은 $(x-6)^2+y^2=25$이므로 $x=\frac{7}{2}$을 대입하여 정리하면 $y^2=\frac{75}{4}$이다.

따라서 두 점 C, D의 y좌표는 각각 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{5\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=5\sqrt{3}$이다.

3. $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 종점의 자취를 그려보자.

그림과 같이 동점 P를 점 O, N에 각각 고정하고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 그리면 점 X이 나타내는 자취의 '테두리'가 만들어 진다. 자취의 '테두리'의 꼭짓점을 이을 때는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 자취인 $\overline{\mathrm{ON}}$을 이용하면 된다.



점 X의 자취의 넓이는 밑변의 길이가 $5\sqrt{3}$이고, 높이가 $\frac{7}{2}$인 평행사변형의 넓이인 $\frac{35}{2}\sqrt{3}$과 같으므로 $p=2$, $q=35$에서 $p+q=37$이다.

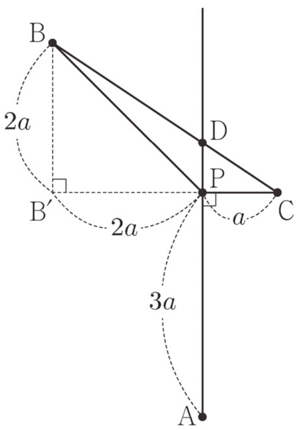
25 21년 10월 교육청 기하 28번

답 : ①

1. $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ 는 서로 수직이다. 이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 3|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ 이다.

   두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면
   $\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ 이므로 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 이고,
   $-\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = -2|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 2\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ 이다.

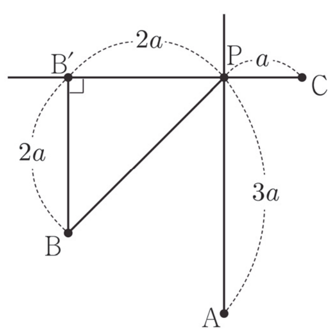
2. 다섯 개의 점 A, B, C, D, P 를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



   $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = a$ 라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 3a$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 2\sqrt{2}a$ 이다.
   점 B 에서 직선 PC 에 내린 수선의 발을 B′ 이라 하면
   $\overline{\mathrm{PB}} = 2\sqrt{2}a$ 에서 $\overline{\mathrm{BB'}} = \overline{\mathrm{PB'}} = 2a$ 이다.

   이때, 두 직각삼각형 BCB′, DCP 의 닮음비는 $\overline{\mathrm{B'C}} : \overline{\mathrm{PC}} = 3 : 1$ 이므로
   $\overline{\mathrm{DP}} = \frac{1}{3} \times \overline{\mathrm{BB'}} = \frac{2a}{3}$ 이고, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 3a + \frac{2}{3}a = \frac{11}{3}a$, $|\overrightarrow{\mathrm{PD}}| = \frac{2a}{3}$
   에서 $k = \frac{11}{2}$ 이다.

   ※ 아래와 같은 경우는 다른 조건은 다 만족시키지만 점 P 가 삼각형 ABC 내부의 점이라는 조건을 만족시키지 않는다.



comment

모든 조건들에서 선분들의 길이가 비로만 주어져 있다. 정확한 값을 구할 수 없으니 임의로 설정해도 좋다. 처음부터 $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = 1$ 로 두어도 좋다는 뜻이다.