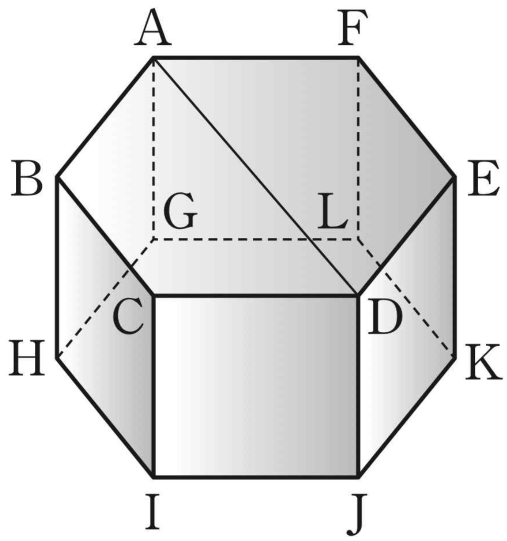
공간도형 유제 1번

그림과 같은 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AD와 평행한 직선의 개수를 a, 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.



공간도형 유제 2번

사면체 OABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$인 직각이등변삼각형이다. (나) 직선 OC는 두 직선 AC, BC와 모두 수직이다. (다) $\overline{\mathrm{OC}}=4$

두 직선 OA, AB가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\sin^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

공간도형 유제 3번

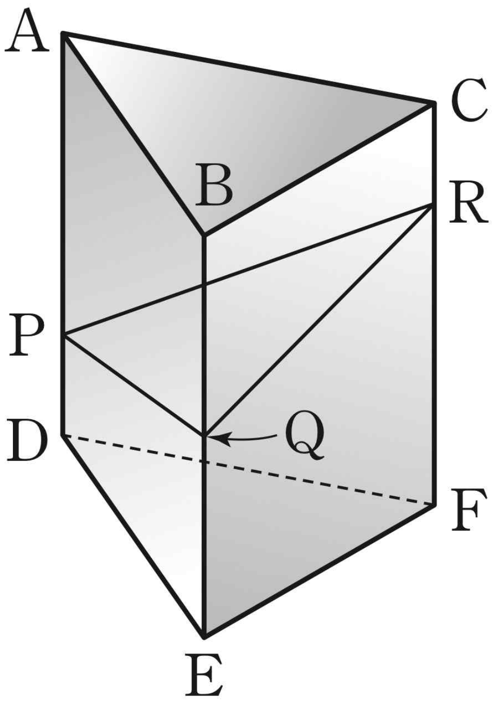
빗변의 길이가 4이고 $\angle \mathrm{A} = 90^{\circ}$ 인 직각이등변삼각형 ABC를 포함하는 평면 α가 있다. $\overline{\mathrm{OA}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{OA}} = 2$를 만족시키는 점 O에 대하여 두 직선 OB, AB가 이루는 예각의 크기를 θ_1, 평면 OBC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_1 \times \cos\theta_2$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

공간도형 유제 4번

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 4인 정삼각기둥 ABC$-$DEF가 있다. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 BE의 중점을 Q, 선분 CF를 1 : 3으로 내분하는 점을 R라 하고 두 평면 PQR, DEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

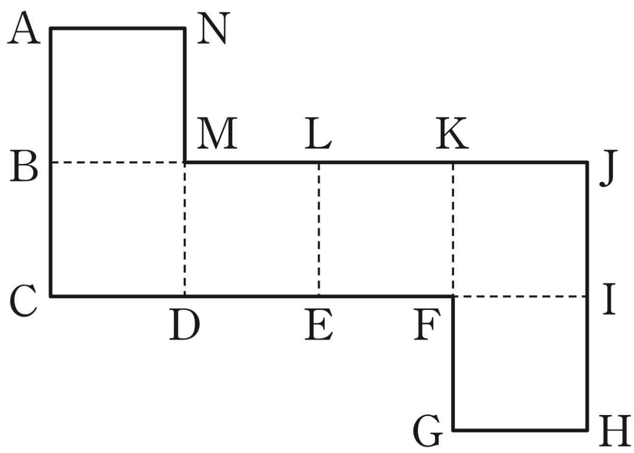
① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$



공간도형 Level 1 1번

그림과 같은 전개도로 만들어지는 정육면체에 대하여 다음 중 직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은?

① 직선 KL ② 직선 FI ③ 직선 FJ ④ 직선 HL ⑤ 직선 GH



공간도형 Level 1 2번

서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 평면 α, β, γ에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

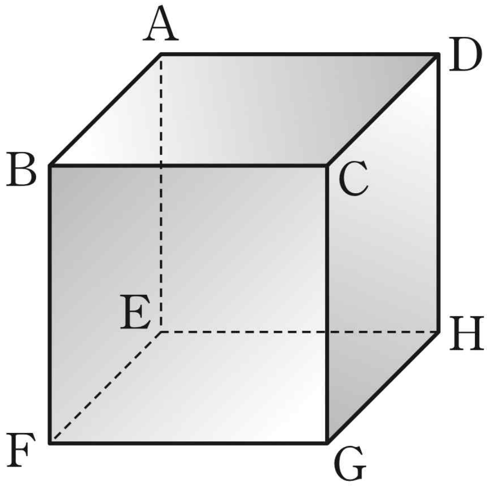
<보기>
ㄱ. $l \perp m$이고 $l \perp n$이면 $m \perp n$이다.
ㄴ. $l // \alpha$이고 $m // \alpha$이면 $l // m$이다.
ㄷ. $\alpha // \beta$이고 $\beta // \gamma$이면 $\alpha // \gamma$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

공간도형 Level 1 3번

그림과 같이 정육면체 ABCD−EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 두 직선 AF, EH와 모두 수직인 서로 다른 직선의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



공간도형 Level 1 4번

평면 α 위의 서로 다른 세 점 A, B, H와 평면 α 위에 있지 않은 점 O가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=6$, $\overline{\mathrm{OB}}=8$, $\overline{\mathrm{OH}}=4$
(나) $\overline{\mathrm{OH}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{OA}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$

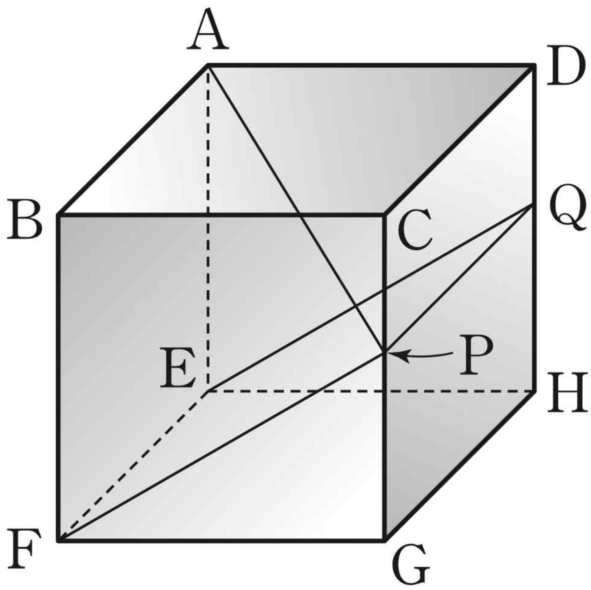
점 A에서 직선 BH에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 선분 BI의 길이는?

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

공간도형 Level 1 5번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD－EFGH에 대하여 $\overline{PG}=\overline{QH}$인 두 점 P, Q가 각각 선분 CG, DH 위에 있다. 두 평면 EFPQ, EFGH가 이루는 예각의 크기가 $30°$일 때, $\overline{AP}^2$의 값은?

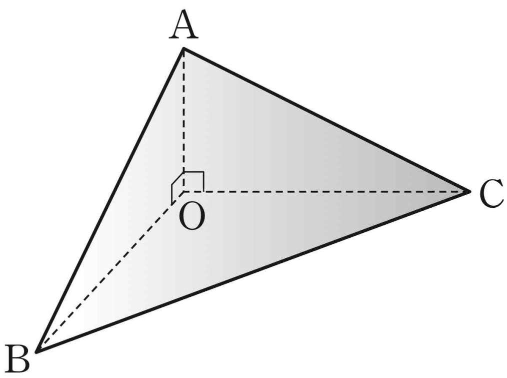
① $30-6\sqrt{3}$　② $30-5\sqrt{3}$　③ $30-4\sqrt{3}$　④ $30-3\sqrt{3}$　⑤ $30-2\sqrt{3}$



공간도형 Level 1 6번

그림과 같이 모서리 OA가 두 모서리 OB, OC와 모두 수직이고, $\overline{OA}=1$, $\overline{OB}=\overline{OC}=2$인 사면체 OABC가 있다. 두 평면 ABC, OBC가 이루는 예각의 크기가 $45°$일 때, 삼각형 OBC의 넓이는?

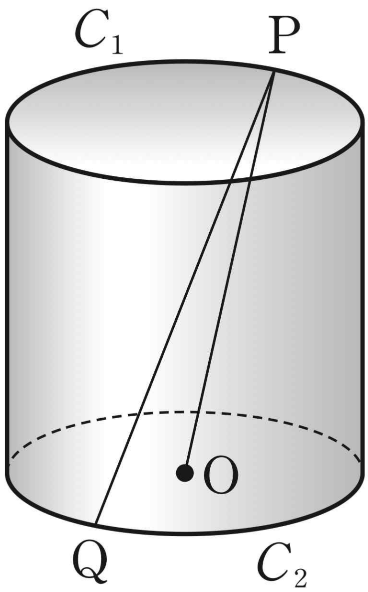
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$



공간도형 Level 1 7번

그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 서로 같은 원기둥에 대하여 한 밑면을 C_1, 다른 한 밑면을 C_2, 원 C_2의 중심을 O라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=5$일 때, 선분 PQ의 원 C_2를 포함하는 평면 위로의 정사영의 길이의 최댓값은?

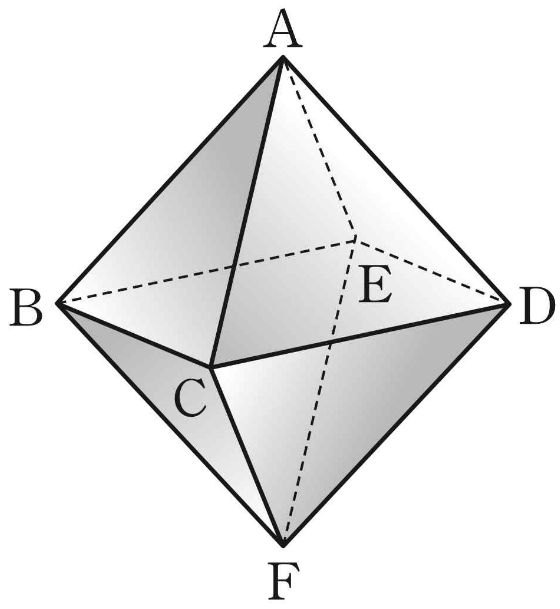
① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{15}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5



공간도형 Level 2 1번

그림과 같은 정팔면체 ABCDEF의 모든 꼭짓점 중에서 3개 이상의 꼭짓점을 포함하는 서로 다른 평면의 개수는 a이다. 이 a개의 평면 중에서 직선 AB를 포함하는 평면의 개수를 b, 직선 AB와 한 점에서 만나는 평면의 개수를 c, 직선 AB를 포함하지 않고 직선 AB와 평행한 평면의 개수를 d라 할 때, $ab-cd$의 값은?

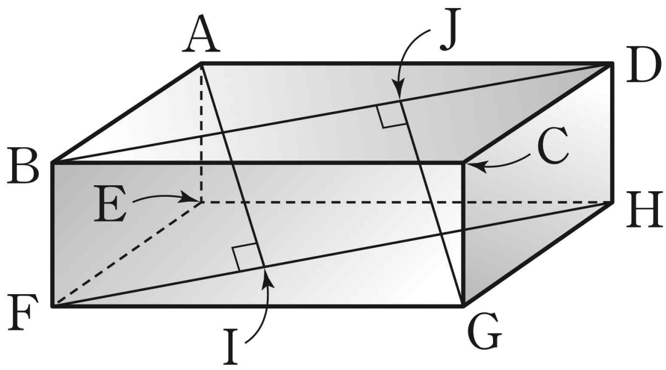
① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25



공간도형 Level 2 2번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=\sqrt{2}$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I, 점 G에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 J라 할 때, 선분 IJ의 길이는?

① $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ② $\frac{11\sqrt{11}}{20}$ ③ $\frac{3\sqrt{11}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{11}}{20}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{11}}{10}$

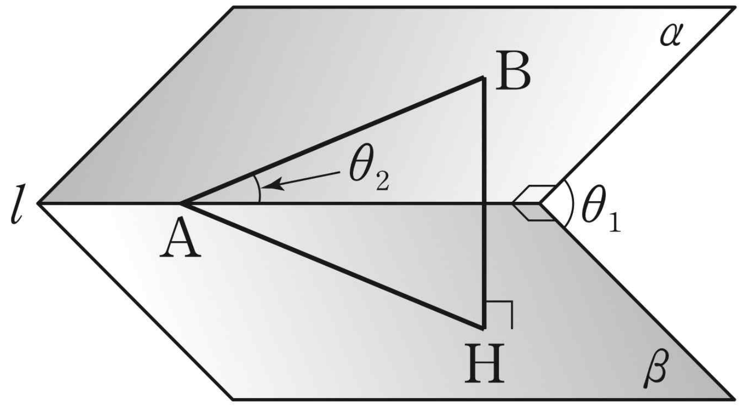


공간도형 Level 2 3번

그림과 같이 이면각의 크기가 θ_1이고 교선이 l인 두 반평면 α, β가 있다. 교선 l 위의 한 점 A와 평면 α 위의 한 점 B에 대하여 직선 AB와 교선 l이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하고 점 B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\theta_1+\theta_2=90^\circ$, $\overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{BH}}=3\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$의 값은? (단, $0^\circ<\theta_1<\theta_2<90^\circ$)

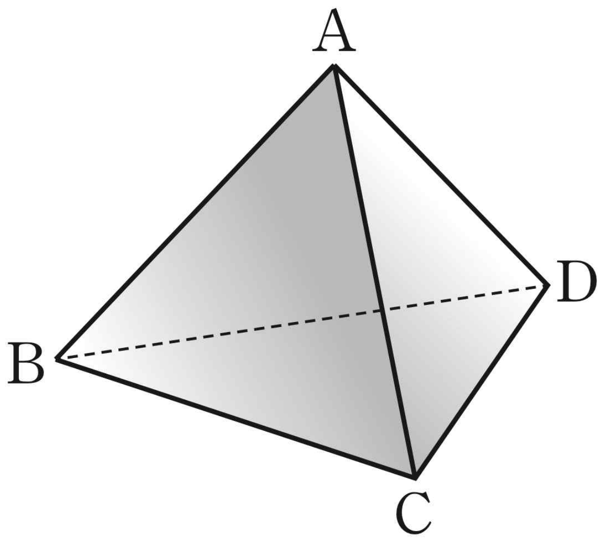
① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $\sqrt{6}$



공간도형 Level 2 4번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD가 있다. 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos 2\theta$의 값은?

① $-\frac{8}{9}$ ② $-\frac{7}{9}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{9}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$



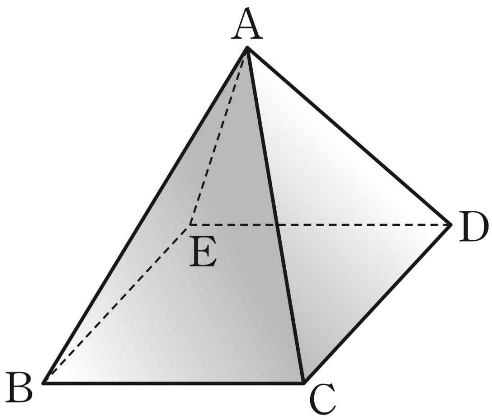
공간도형 Level 2 5번

그림과 같이 밑면은 정사각형이고 네 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형인 정사각뿔 A－BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 BC의 길이는 유리수이고, $\overline{\mathrm{AC}}^2-\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}^2}{4}=8$이다.
(나) 정사각뿔 A－BCDE의 겉넓이는 $4+8\sqrt{2}$이다.

두 평면 ACD, BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{1}{8}$ ⑤ $\dfrac{1}{10}$



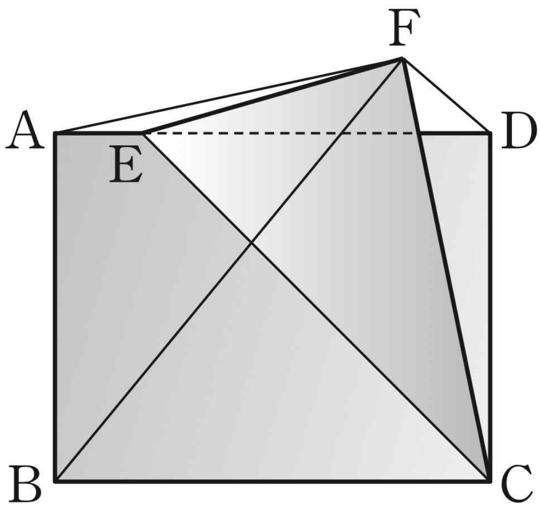
공간도형 Level 2 6번

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}>2$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AD 위에 $\overline{DE}=2$인 점 E가 있다. 선분 CE를 접는 선으로 하여 평면 ABCD와 이루는 각의 크기가 45°가 되도록 삼각형 DEC를 접어 올려 생긴 삼각형을 삼각형 FEC라 하자. 두 평면 FAB, FCD가 평면 ABCD와 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자.

$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$일 때, 삼각형 FAB의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는?

(단, 점 F의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 CDE의 내부에 존재한다.)

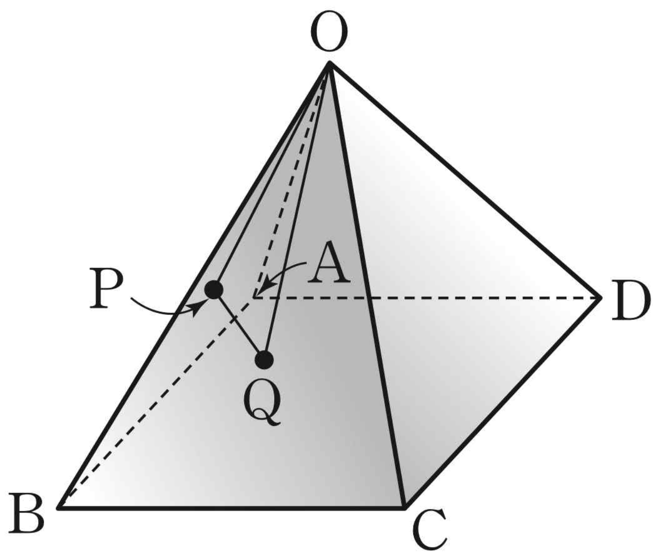
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$



공간도형 Level 2 7번

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔 O－ABCD에서 두 삼각형 OAB, OBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3



공간도형 Level 3 1번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD를 한 밑면으로 하는 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. $\overline{\mathrm{AE}} > 1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

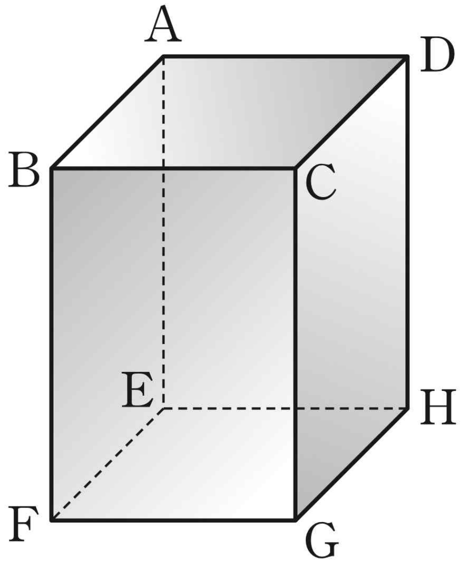
<보기>

ㄱ. 두 직선 AB, DG가 이루는 예각의 크기는 45°보다 크다.

ㄴ. 두 직선 AF, EG가 이루는 예각의 크기는 60°보다 크다.

ㄷ. 두 직선 AG, DF가 이루는 예각의 크기가 30°이면 $\overline{\mathrm{AF}}^2 = 7 + 4\sqrt{3}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



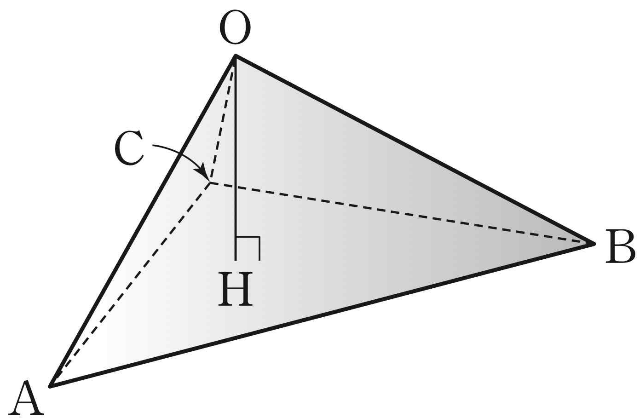
공간도형 Level 3 2번

그림과 같이 $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=3$, $\overline{OC}=1$인 사면체 OABC에 대하여 꼭짓점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 ABC의 내심이다.

$\angle BOC-\angle AOC=10^{\circ}$ 일 때, $(\overline{BC}-\overline{AC})^2=a+b\cos 10^{\circ}$ 이다. $a+b$의 값은?

(단, a, b는 정수이고, $\cos 10^{\circ}$ 는 무리수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



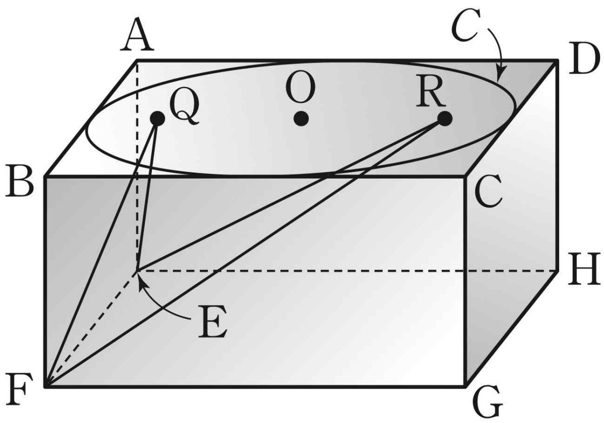
공간도형 Level 3 3번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}>2$인 직육면체 ABCD−EFGH에 대하여 타원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 타원 C는 네 꼭짓점에서 직사각형 ABCD의 네 변에 각각 접한다. (나) 타원 C의 중심을 O라 하면 두 평면 OEF, OGH가 서로 수직이다.

타원 C의 두 초점 중 점 A에 가까운 점을 Q, 나머지 한 초점을 R라 하고, 두 평면 QEF, REF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

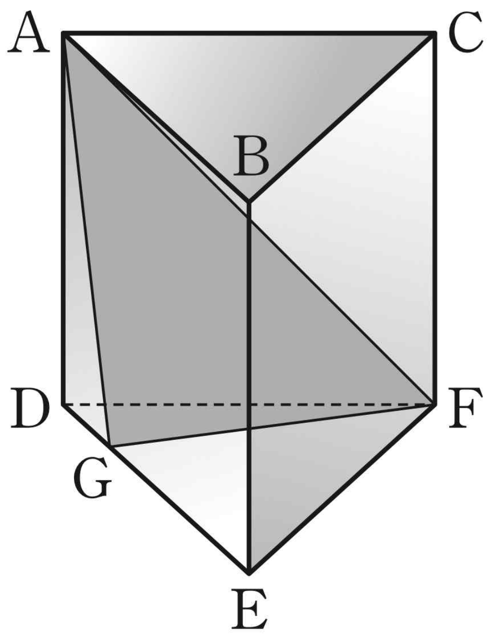


공간도형 Level 3 4번

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 선분 DE를 1:3으로 내분하는 점을 G라 하고, 평면 AGF와 삼각기둥 ABC−DEF의 세 개의 옆면이 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\dfrac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i}$의 최댓값은?

(단, i, j는 모두 1 이상 3 이하인 자연수이다.)

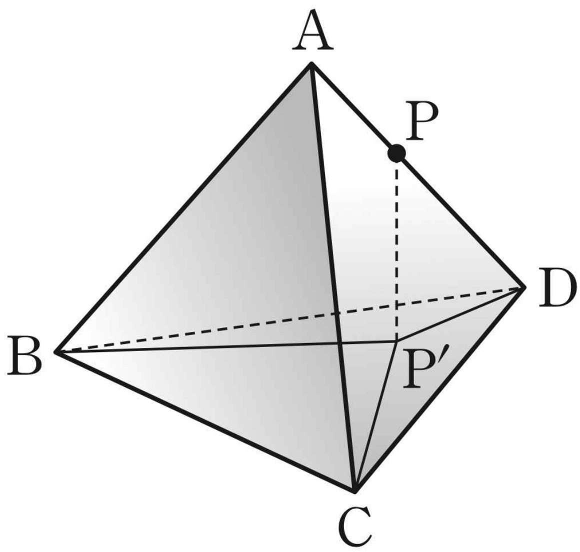
① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ $\dfrac{7}{4}$ ④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{2}$



공간도형 Level 3 5번

그림과 같이 정사면체 ABCD에서 모서리 AD를 $1:n$으로 내분하는 점을 P라 하자. 점 P의 평면 BCD 위로의 정사영을 P′이라 하고 세 삼각형 P′BC, P′CD, P′DB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1 = S_2 + 2S_3$일 때, 양수 n의 값은?

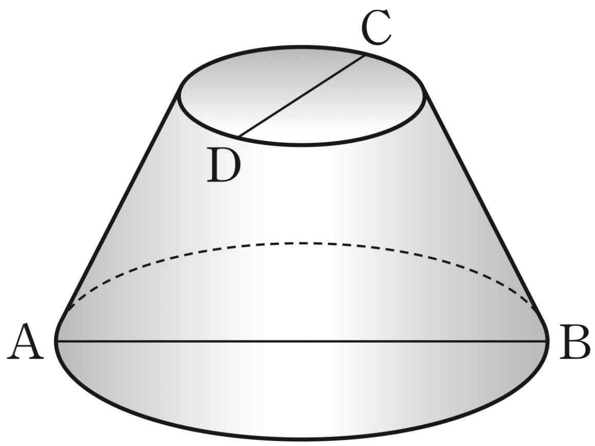
① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



공간도형 Level 3 6번

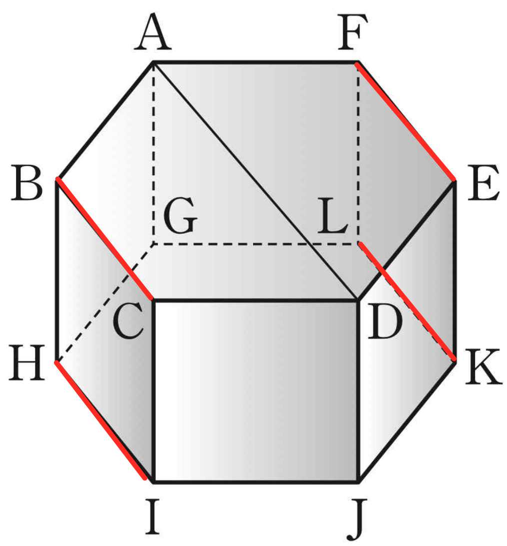
그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

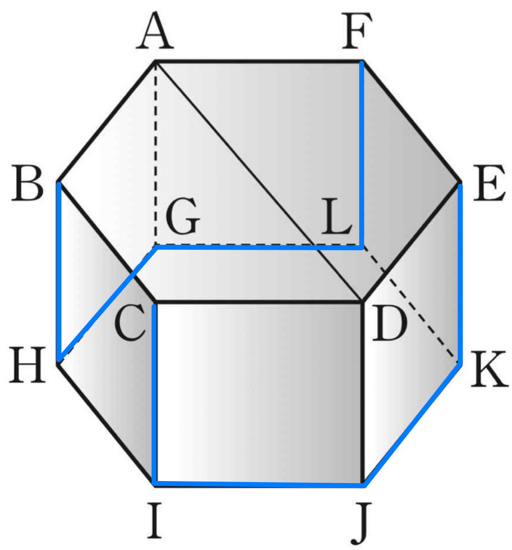
① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$



공간도형 유제 1번

그림과 같은 정육각기둥 ABCDEF$-$GHIJKL의 모든 모서리를 연장한 직선 중에서 직선 AD와 평행한 직선의 개수를 a, 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.

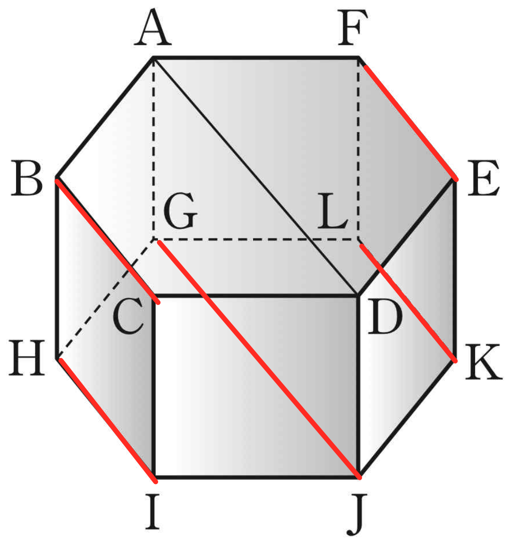




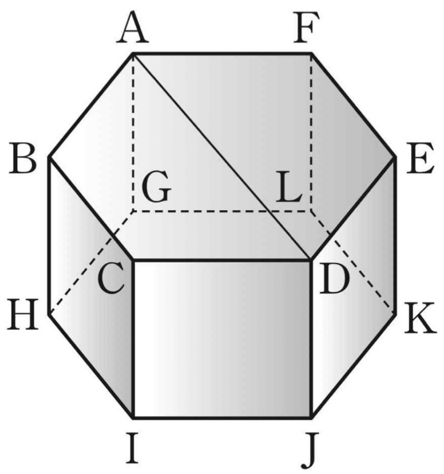
$4 \times 8 = \boxed{32}$

공간도형 유제 1번 변형

그림과 같은 정육각기둥 ABCDEF−GHIJKL에 대하여 정육각기둥의 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 직선 AD와 평행한 직선의 개수를 a, 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선의 개수를 b라 할 때, ab의 값을 구하시오.



5



직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선을 직선 PQ라 할 때,

1. 직선 PQ가 평면 ABCDEF 위에 있으면
직선 AD와 평행하거나 한 점에서 만남. (X)

2. P가 평면 ABCDEF 위에 있고,
Q가 평면 GHIJKL 위에 있을 때

$P \neq A,\ P \neq D \longrightarrow \underset{(P)}{4} \times \underset{(Q)}{6} = \boxed{24}$

3. 직선 PQ가 평면 GHIJKL 위에 있을 때
평면 GHIJKL 위의 직선의 개수 $= {}_6C_2 = 15$
평면 GHIJKL 위의 직선 중 직선 AD와 평행한 직선의 개수 $= 3$

$15 - 3 = \boxed{12}$

$5 \times 36 = \boxed{180}$

(나) 직선 OC ⊥ 평면 ABC

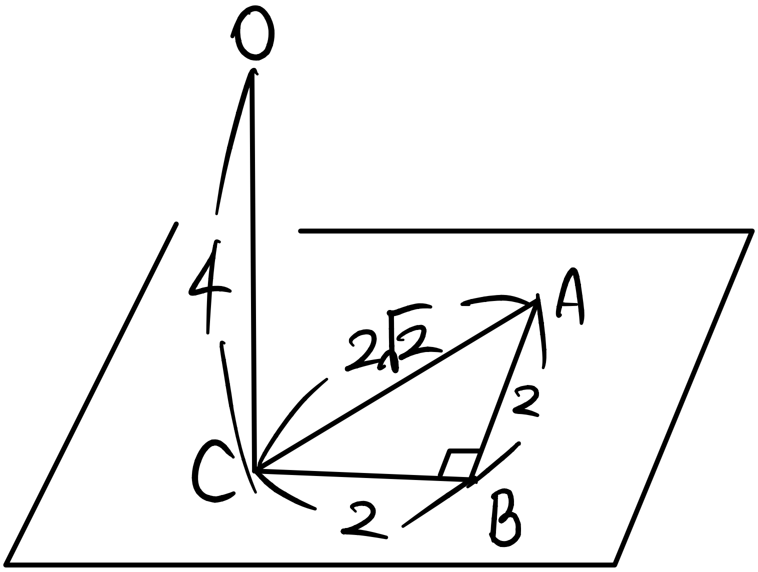
평면 ABC를 눕혀서 그리자.

공간도형 유제 2번

사면체 OABC가 다음 조건을 만족시킨다.

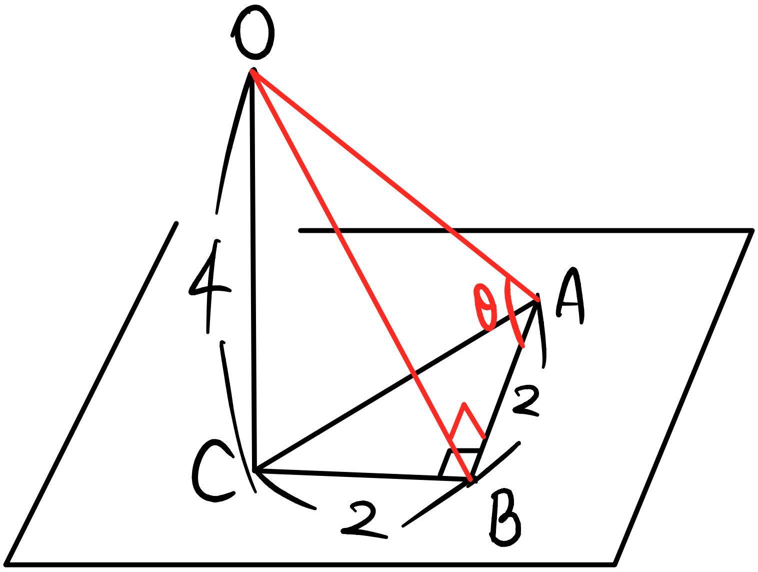
(가) 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$인 직각이등변삼각형이다. (나) 직선 OC는 두 직선 AC, BC와 모두 수직이다. (다) $\overline{OC} = 4$

두 직선 OA, AB가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\sin^2\theta = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



$\overline{OA} = 2\sqrt{6}$

$\overline{OB} = 2\sqrt{5}$



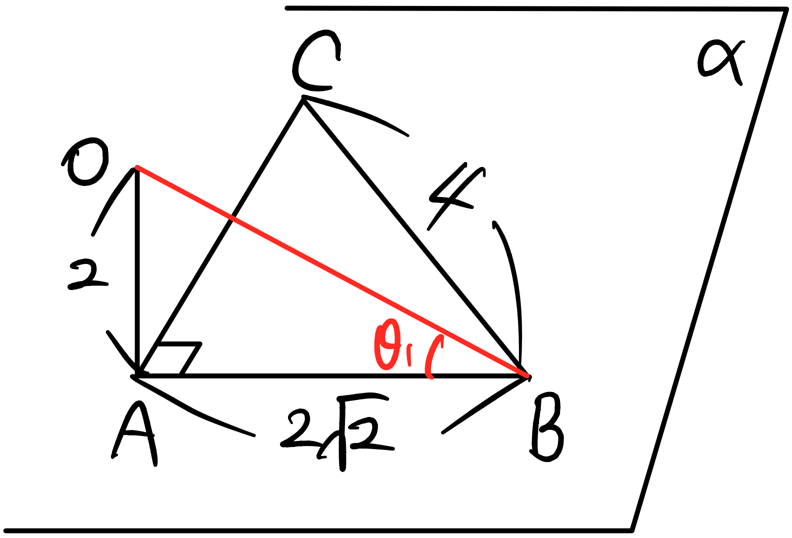
$$\sin^2\theta = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{5}{6}$$

$\boxed{11}$

공간도형 유제 3번

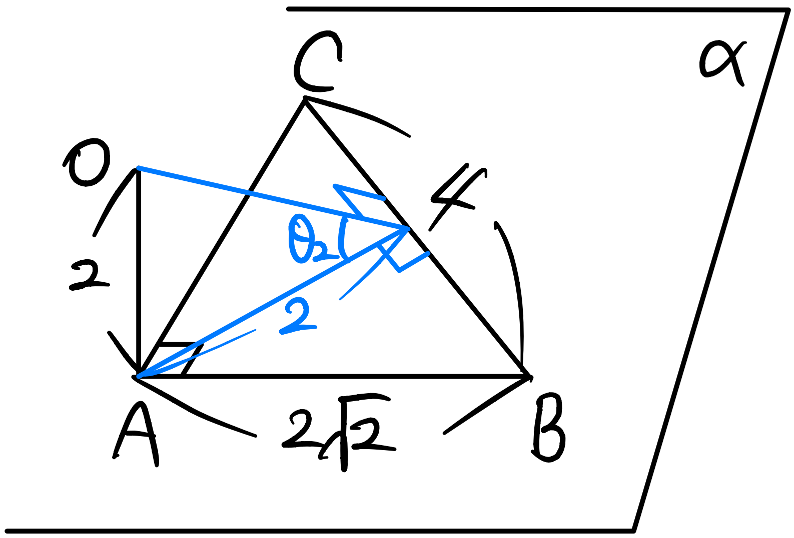
빗변의 길이가 4이고 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 ABC를 포함하는 평면 α가 있다. $\overline{OA} \perp \alpha$, $\overline{OA} = 2$를 만족시키는 점 O에 대하여 두 직선 OB, AB가 이루는 예각의 크기를 θ_1, 평면 OBC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_1 \times \cos\theta_2$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$



$\overline{OB} = 2\sqrt{3}$

$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$



교선 BC

$\theta_2 = 45^\circ$

$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(i) 정사영 $S\cos\theta = S'$

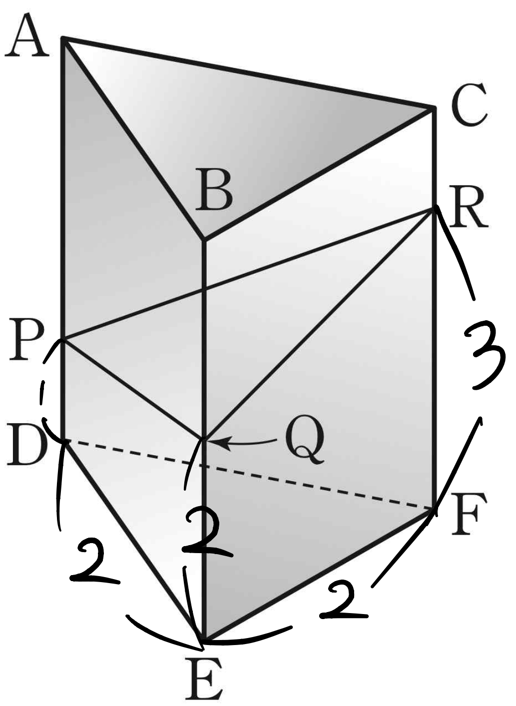
공간도형 유제 4번 09 수능 24번 (원기둥 3개) 이랑 비슷

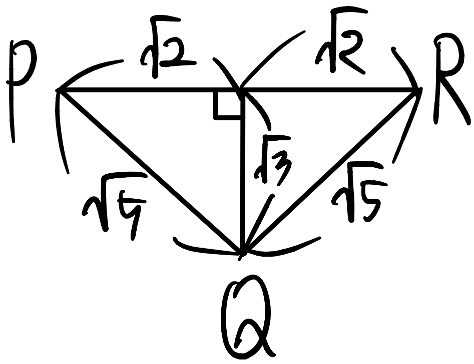
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 4인 정삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 선분 AD를 3:1로 내분하는 점을 P, 선분 BE의 중점을 Q, 선분 CF를 1:3으로 내분하는 점을 R라 하고 두 평면 PQR, DEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

$\overline{PQ} = \overline{QR} = \sqrt{5}$

$\overline{PR} = 2\sqrt{2}$





삼각형 PQR 넓이 $= \sqrt{6} = S$

삼각형 PQR의 평면 DEF 위로의 정사영 = 삼각형 DEF

$S' = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \tan\theta = 1$

(ii) 이면각의 정의 (교선)

공간도형 유제 4번

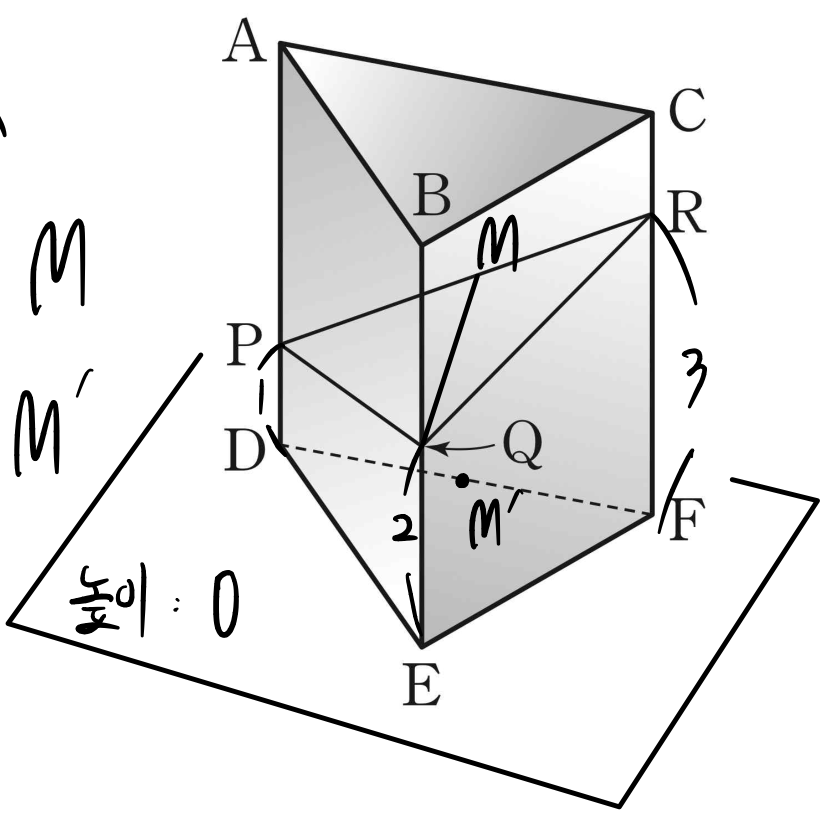
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 4인 정삼각기둥 ABC−DEF가 있다. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 BE의 중점을 Q, 선분 CF를 1 : 3으로 내분하는 점을 R라 하고 두 평면 PQR, DEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

$\overline{PQ} = \overline{PR}$

$\overline{PR}$ 중점 M

$\overline{DF}$ 중점 M′

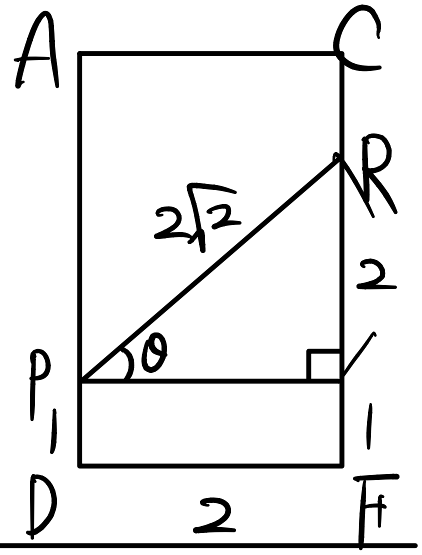


M 높이 = Q 높이 = 2 → 교선 l // 직선 MQ // 직선 EM′

직선 PR ⊥ 직선 l, 직선 DF ⊥ 직선 l

∴ θ = 두 직선 PR, DF가 이루는 각의 크기

$\boxed{\tan\theta = 1}$



X $\overline{AD}$ 중점 M_1, $\overline{CF}$ 중점 M_2 ⟶ 평면 DEF // 평면 M_1QM_2

$\overline{AC}$ 중점 = $\overline{FJ}$ 중점

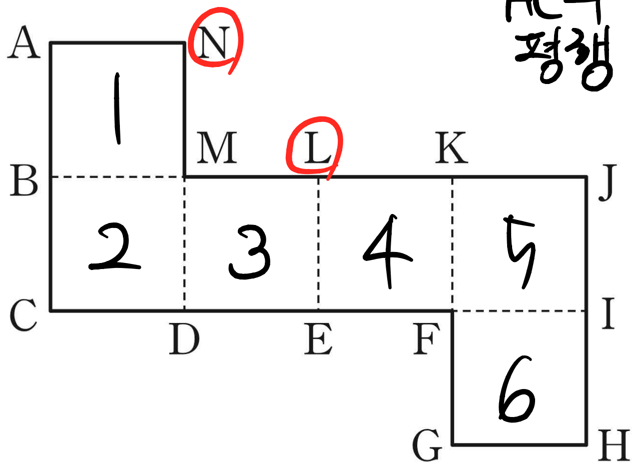
공간도형 Level 1 1번

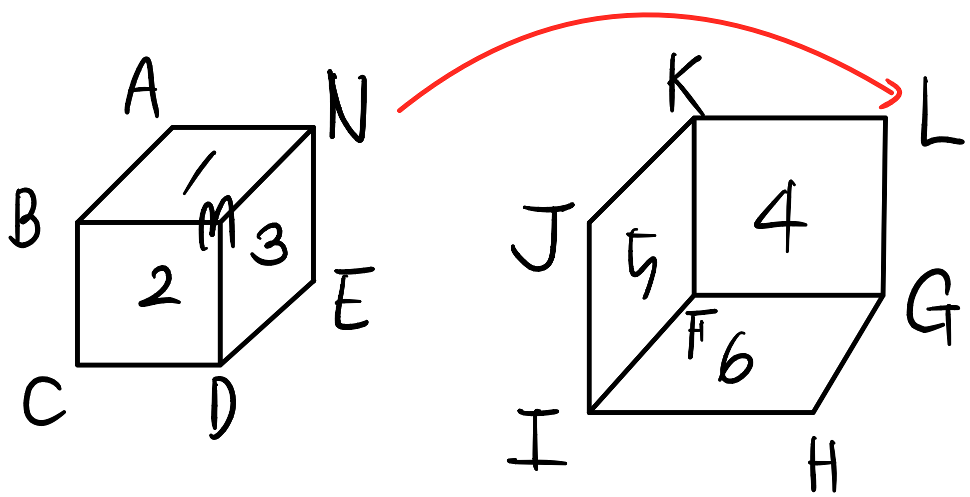
그림과 같은 전개도로 만들어지는 정육면체에 대하여 다음 중 직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은?

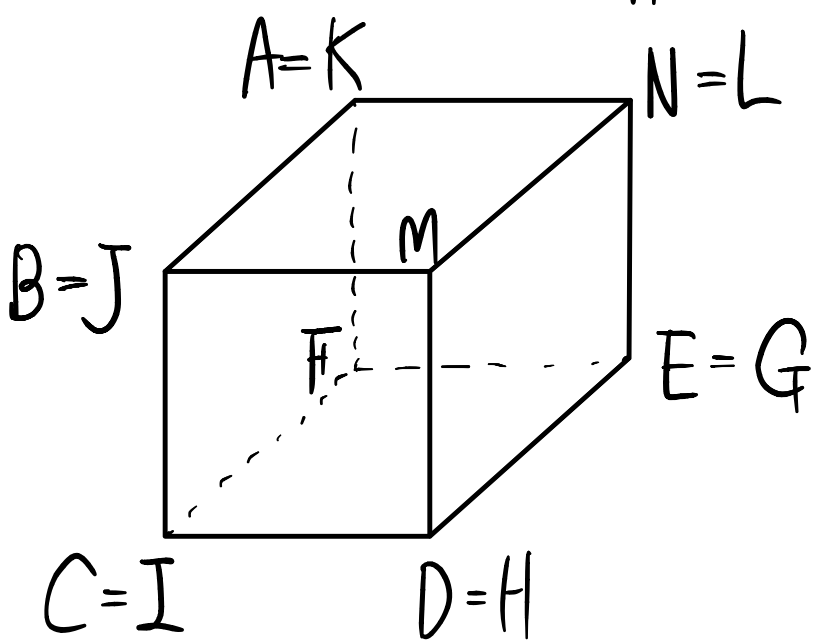
① 직선 KL ② 직선 FI ③ 직선 FJ ④ 직선 HL ⑤ 직선 GH

A C

AC와 평행







공간도형 Level 1 2번

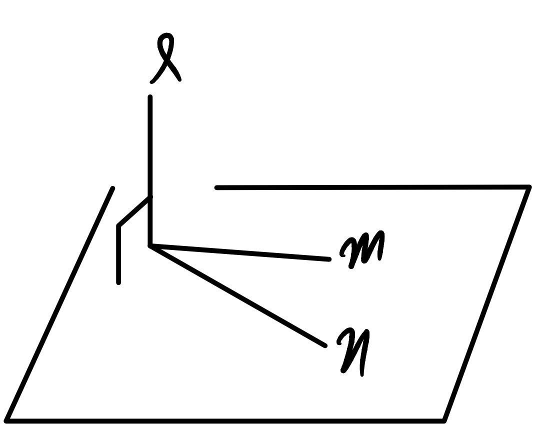
서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 평면 α, β, γ에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

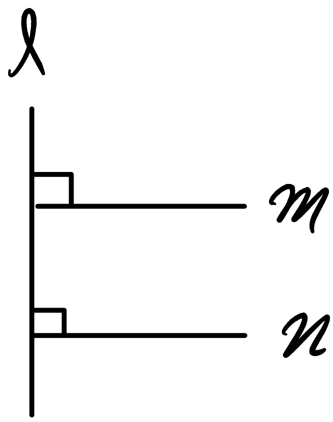
<보기>

ㄱ. $l \perp m$이고 $l \perp n$이면 $m \perp n$이다.
ㄴ. $l // \alpha$이고 $m // \alpha$이면 $l // m$이다.
ㄷ. $\alpha // \beta$이고 $\beta // \gamma$이면 $\alpha // \gamma$이다.

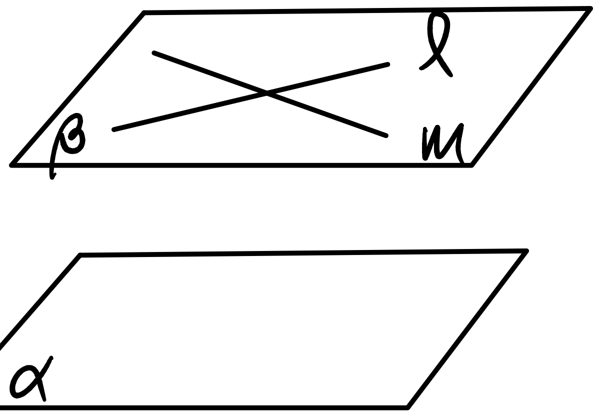
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. 반례





ㄴ. 반례

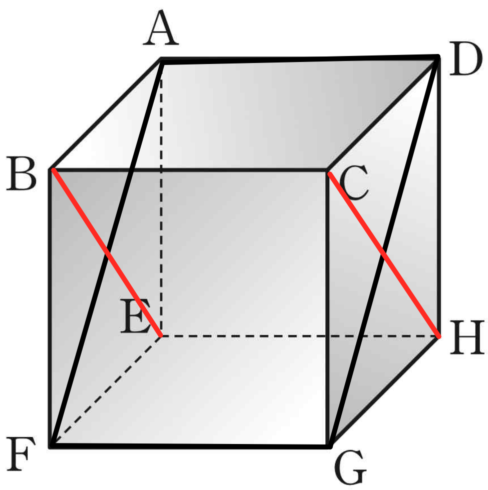


$\alpha // \beta$

공간도형 Level 1 3번

그림과 같이 정육면체 ABCD－EFGH의 서로 다른 두 꼭짓점을 지나는 직선 중에서 두 직선 AF, EH와 모두 수직인 서로 다른 직선의 개수는? $= n$

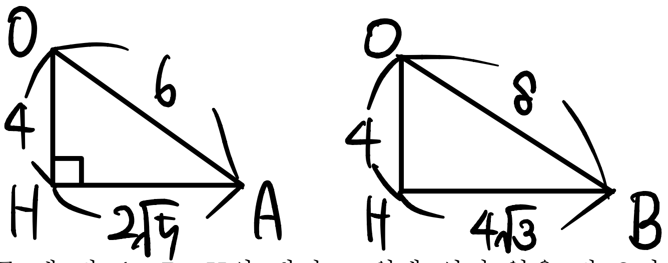
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$n =$ 직선 AF, 직선 FG 와 모두 수직인 직선의 개수

$=$ 평면 AFGD와 수직인 직선의 개수

2개



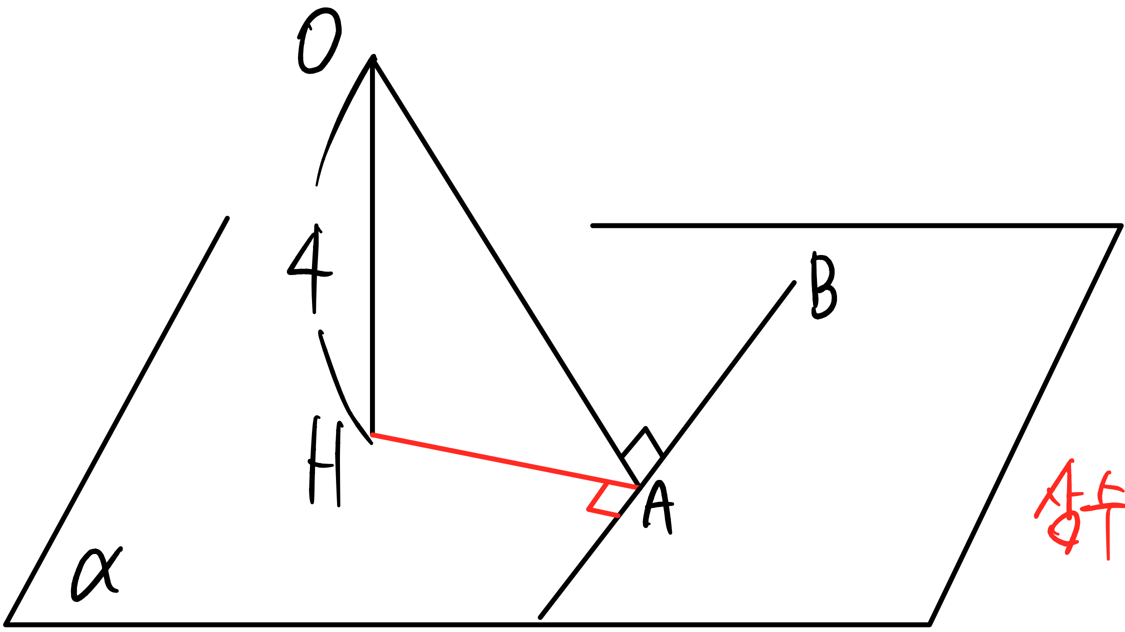
공간도형 Level 1 4번

평면 α 위의 서로 다른 세 점 A, B, H와 평면 α 위에 있지 않은 점 O가 다음 조건을 만족시킨다.

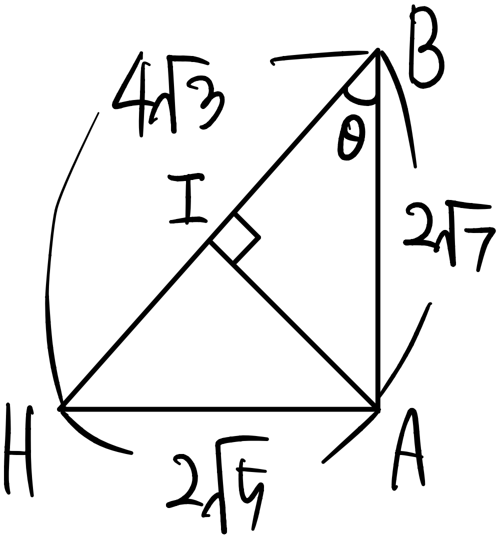
(가) $\overline{OA}=6$, $\overline{OB}=8$, $\overline{OH}=4$
(나) $\overline{OH}\perp\alpha$, $\overline{OA}\perp\overline{AB}$

점 A에서 직선 BH에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 선분 BI의 길이는?

① $\sqrt{3}$　　② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$



삼수선 정리



$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}$$

$$\overline{BI} = 2\sqrt{7}\cos\theta$$

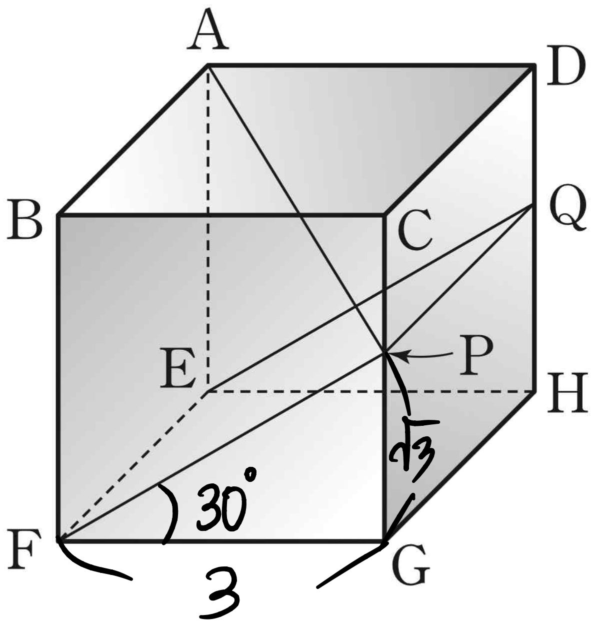
$$= \frac{28}{4\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

공간도형 Level 1 5번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 $\overline{PG} = \overline{QH}$인 두 점 P, Q가 각각 선분 CG, DH 위에 있다. 두 평면 EFPQ, EFGH가 이루는 예각의 크기가 $30°$일 때, $\overline{AP}^2$의 값은?

교선 EF

① $30-6\sqrt{3}$ ② $30-5\sqrt{3}$ ③ $30-4\sqrt{3}$ ④ $30-3\sqrt{3}$ ⑤ $30-2\sqrt{3}$



$$\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2$$
$$= (3\sqrt{2})^2 + (3-\sqrt{3})^2$$
$$= 18 + 9 + 3 - 6\sqrt{3}$$

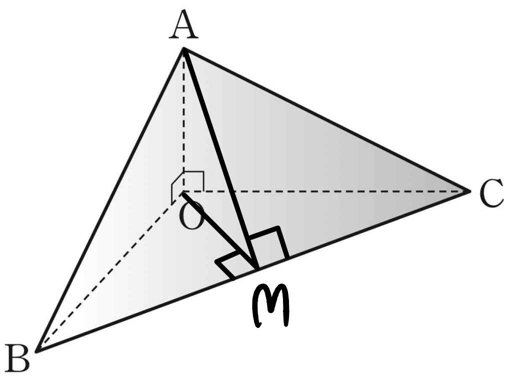
$\overline{BC}$ 중점 M

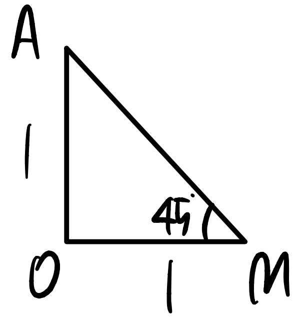
공간도형 Level 1 6번

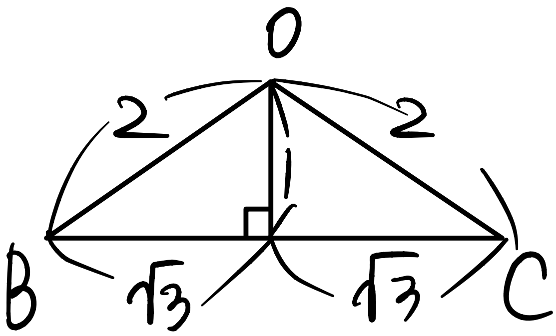
그림과 같이 모서리 OA가 두 모서리 OB, OC와 모두 수직이고, $\overline{OA}=1$, $\overline{OB}=\overline{OC}=2$인 사면체 OABC가 있다. 두 평면 ABC, OBC가 이루는 예각의 크기가 $45°$일 때, 삼각형 OBC의 넓이는?

교선 BC

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$







2r

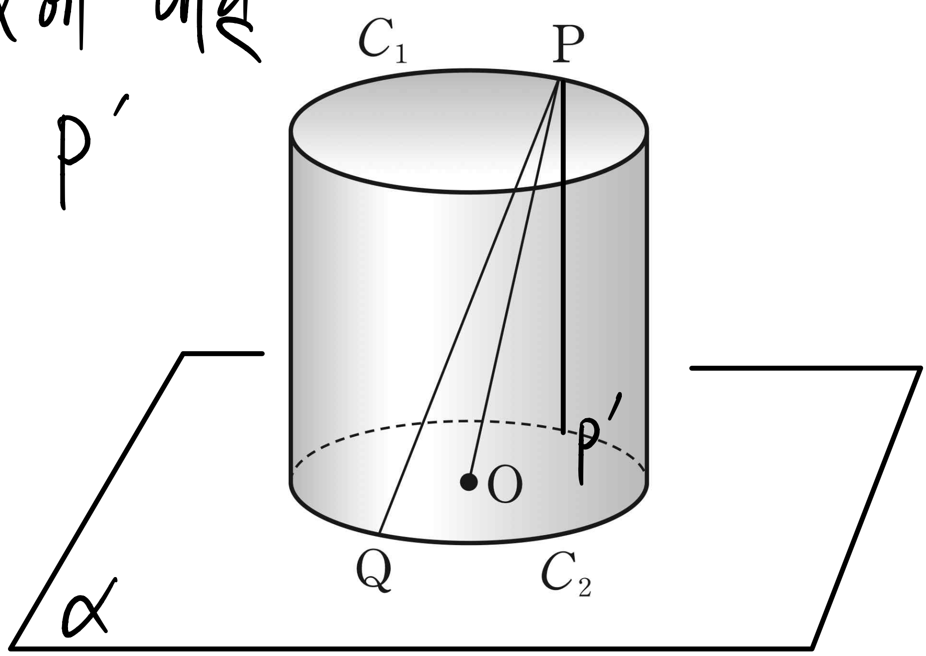
공간도형 Level 1 7번

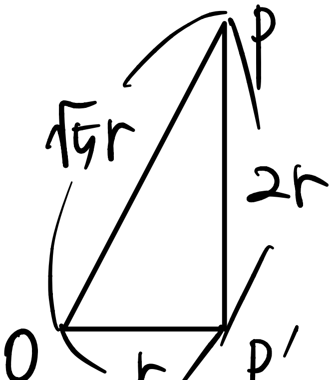
그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 서로 같은 원기둥에 대하여 한 밑면을 C_1, 다른 한 밑면을 C_2, 원 C_2의 중심을 O라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=5$일 때, 선분 PQ의 원 C_2를 포함하는 평면 위로의 정사영의 길이의 최댓값은?

$=\alpha$

① $\sqrt{5}$　　② $\sqrt{10}$　　③ $\sqrt{15}$　　④ $2\sqrt{5}$　　⑤ 5

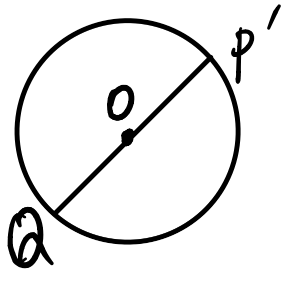
P에서 α에 내린 수선의 발 P′





$\sqrt{5}r=5 \longrightarrow r=\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{P'Q}}$ 길이 최댓값 $=2r=2\sqrt{5}$



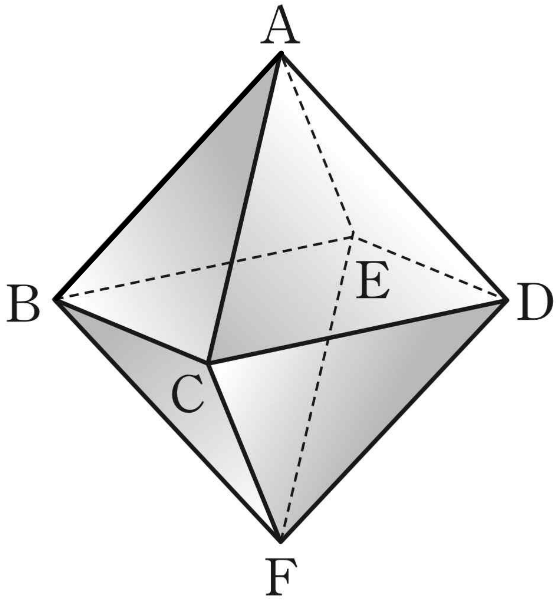
a, b

공간도형 Level 2 1번

그림과 같은 정팔면체 ABCDEF의 모든 꼭짓점 중에서 3개 이상의 꼭짓점을 포함하는 서로 다른 평면의 개수는 a이다. 이 a개의 평면 중에서 직선 AB를 포함하는 평면의 개수를 b, 직선 AB와 한 점에서 만나는 평면의 개수를 c, 직선 AB를 포함하지 않고 직선 AB와 평행한 평면의 개수를 d라 할 때, $ab-cd$의 값은?

① 21　　② 22　　③ 23　　④ 24　　⑤ 25

$a = b+c+d$



$a = {}_6C_3 - \underset{\text{BCD}}{3} - \underset{\text{ABF}}{3} - \underset{\text{ACF}}{3} = \boxed{11}$

BCD = BCE = BDE = CDE

ABF = ABD = ADF = BDF

ACF = ACE = AEF = CEF

b = ABC, ABD(= ABF), ABE $\longrightarrow \boxed{3}$

c, d

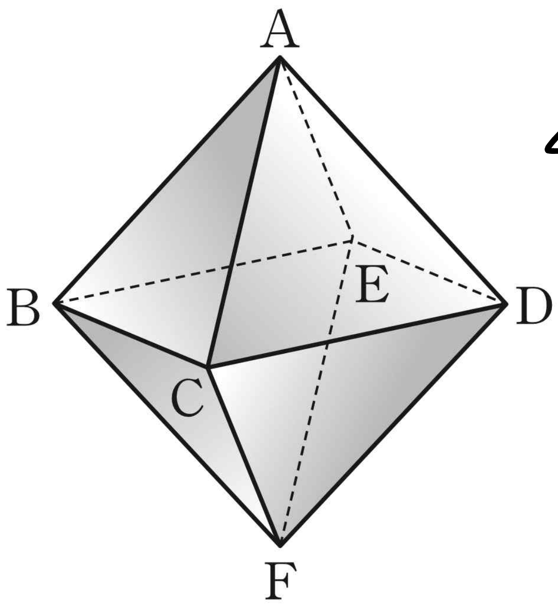
공간도형 Level 2 1번

그림과 같은 정팔면체 ABCDEF의 모든 꼭짓점 중에서 3개 이상의 꼭짓점을 포함하는 서로 다른 평면의 개수는 a이다. 이 a개의 평면 중에서 직선 AB를 포함하는 평면의 개수를 b, 직선 AB와 한 점에서 만나는 평면의 개수를 c, 직선 AB를 포함하지 않고 직선 AB와 평행한 평면의 개수를 d라 할 때, $ab-cd$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$a=11$

$b=3$



${}_4C_2-$

c : ① A를 지남.

② B를 지남.

① = ② = 3

$\therefore c=6$

① = ACD, ACE, ADE, ~~ADF~~

(= ACF
= AEF)

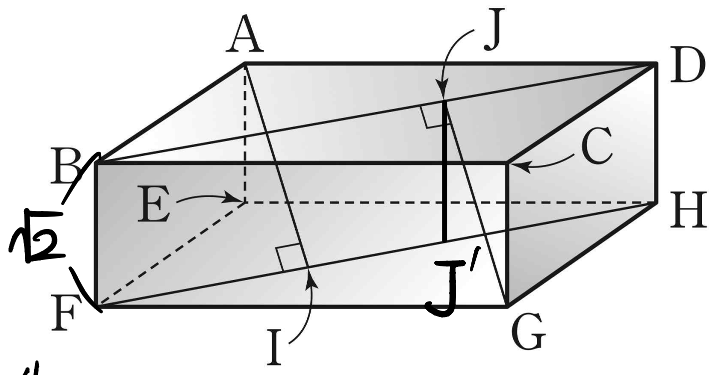
d : 직선 DF 포함, 직선 AB 포함 X

CDF, DEF $\therefore d=2$

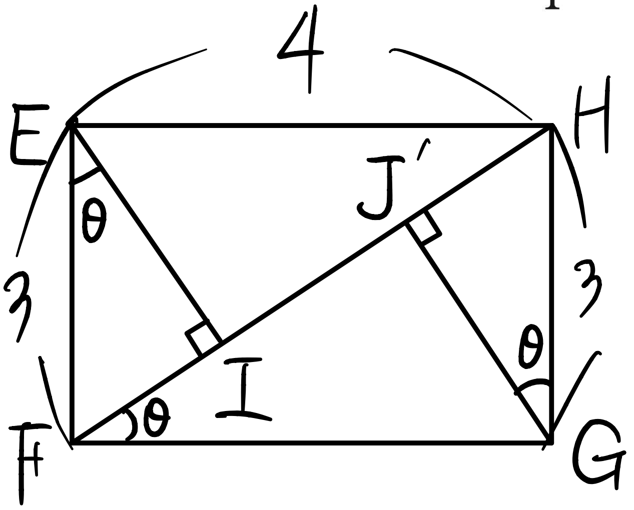
공간도형 Level 2 2번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=\sqrt{2}$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I, 점 G에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 J라 할 때, 선분 IJ의 길이는?

① $\frac{\sqrt{11}}{2}$　② $\frac{11\sqrt{11}}{20}$　③ $\frac{3\sqrt{11}}{5}$　④ $\frac{13\sqrt{11}}{20}$　⑤ $\frac{7\sqrt{11}}{10}$



$\sqrt{\overline{IJ'}^2+2}=?$



$\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\overline{IJ'}=5-\overline{FI}-\overline{J'H}$

$=5-3\sin\theta-3\sin\theta=5-6\sin\theta=\frac{7}{5}$

$\overline{IJ}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2+2}=\sqrt{\frac{49+50}{25}}=\frac{3\sqrt{11}}{5}$

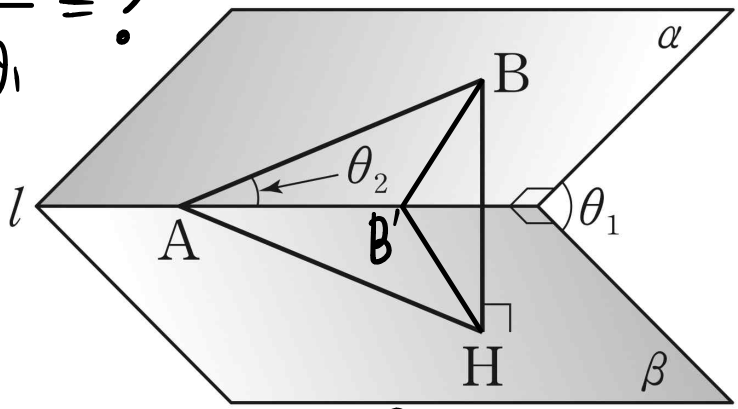
공간도형 Level 2 3번

그림과 같이 이면각의 크기가 θ_1이고 교선이 l인 두 반평면 α, β가 있다. 교선 l 위의 한 점 A와 평면 α 위의 한 점 B에 대하여 직선 AB와 교선 l이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하고 점 B에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하자.

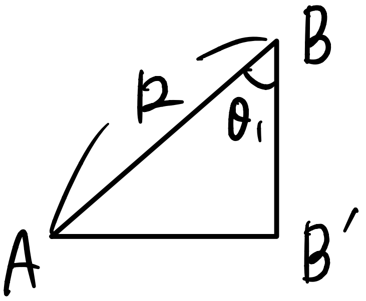
$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BH} = 3\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$의 값은? (단, $0^\circ < \theta_1 < \theta_2 < 90^\circ$)

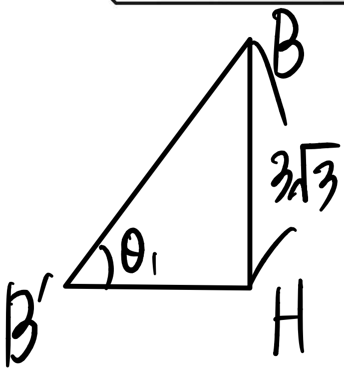
① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $\sqrt{6}$

$\dfrac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \dfrac{1}{\tan\theta_1} = ?$



$\theta_1 < 45^\circ$





$\overline{BB'} = 12\cos\theta_1$

$\overline{BH} = \overline{BB'}\sin\theta_1 = 12\cos\theta_1\sin\theta_1 = 3\sqrt{3}$

$\cos\theta_1 \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

① $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{\tan\theta} = \sqrt{3}$

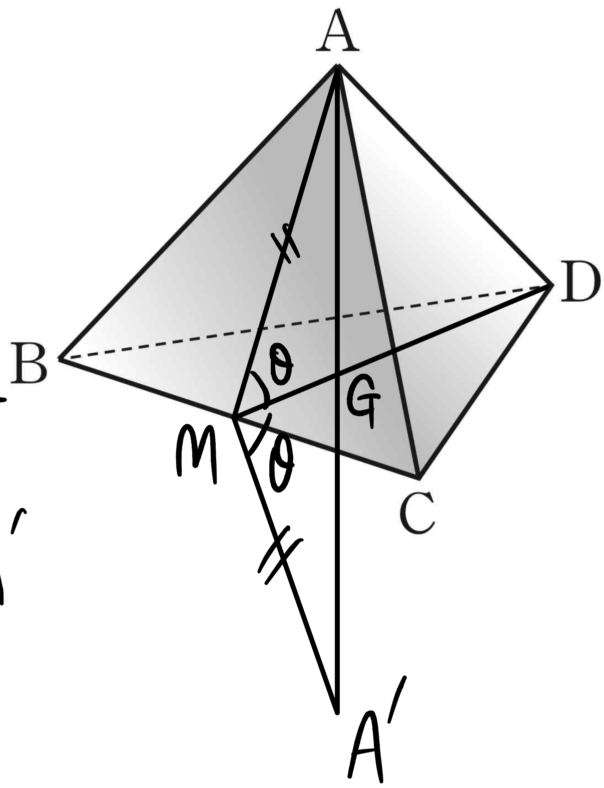
② $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

꼭 2일 필요 없음. 2이면 계산 더러움

공간도형 Level 2 4번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD가 있다. 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos 2\theta$의 값은?

① $-\frac{8}{9}$ ② $-\frac{7}{9}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{9}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$



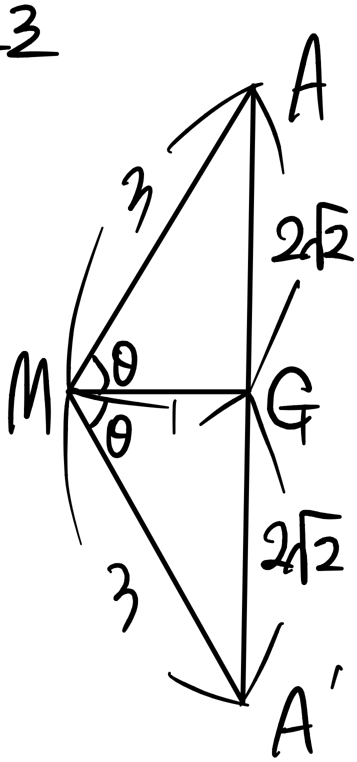
$\overline{BC}$ 중점 M

BCD 무게중심 G

$\overline{AG}$ 2:1 외분점 A'

$\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이므로

$\overline{AM} = 3$으로 잡자.



어떻게 한 건지
댓글로 물어보시면
설명해드립니다 :)

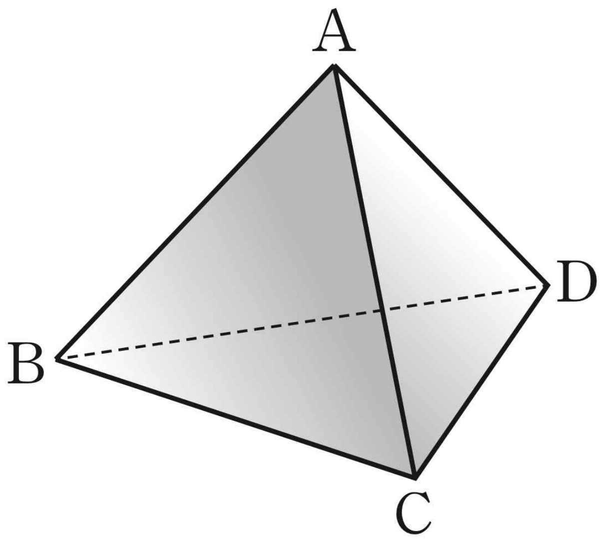
$$\boxed{\cos 2\theta = \frac{1-8}{1+8} = -\frac{7}{9}}$$

미적분 교과서에 있는 삼각함수 덧셈정리에서
유도할 수 있는 배각공식 알면 훨씬 편함. (그래서 수능에 나오기 힘들 듯함)

공간도형 Level 2 4번

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD가 있다. 두 평면 ABC, BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos 2\theta$의 값은?

① $-\frac{8}{9}$ ② $-\frac{7}{9}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{9}$ ⑤ $-\frac{4}{9}$



$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

공간도형 Level 2 5번

그림과 같이 밑면은 정사각형이고 네 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형인 정사각뿔 A−BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.

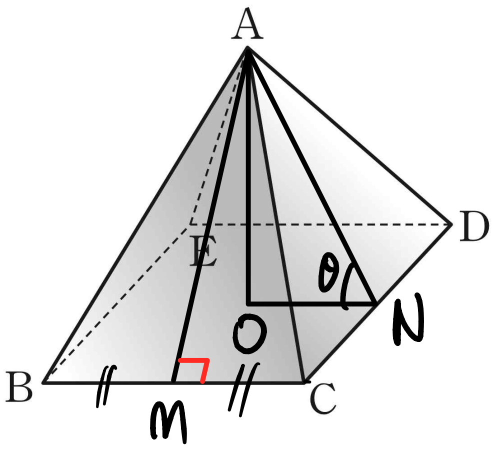
(가) 선분 BC의 길이는 유리수이고, $\overline{\mathrm{AC}}^2-\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}^2}{4}=8$이다.
(나) 정사각뿔 A−BCDE의 겉넓이는 $4+8\sqrt{2}$이다.

두 평면 ACD, BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?

교선 CD

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

(가) $\overline{BC}$ 중점 M,



$\overline{AC}^2-\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2$

$=\overline{AC}^2-\overline{MC}^2$

$=\overline{AM}^2=8$

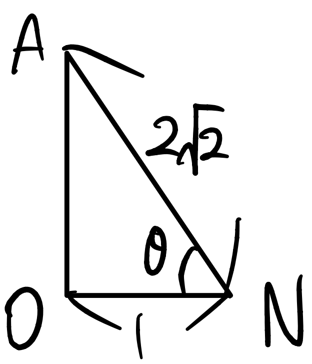
$\therefore \overline{AM}=2\sqrt{2}$

(나) BCDE 넓이 + 4 × ABC 넓이

$=d^2+4\times\frac{1}{2}\times d\times 2\sqrt{2}=4+8\sqrt{2}$ $\therefore d=2$

CD 중점 N, $\theta=\angle ANO$, $\overline{AN}=\overline{AM}=2\sqrt{2}$

$\overline{ON}=\frac{1}{2}d=1$



$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{8}$

문제에서 주어진 그림 못생김 (보기 힘듦) ⟶ 다시 그리자.

평면 ABCD를 눕혀서 그리자.

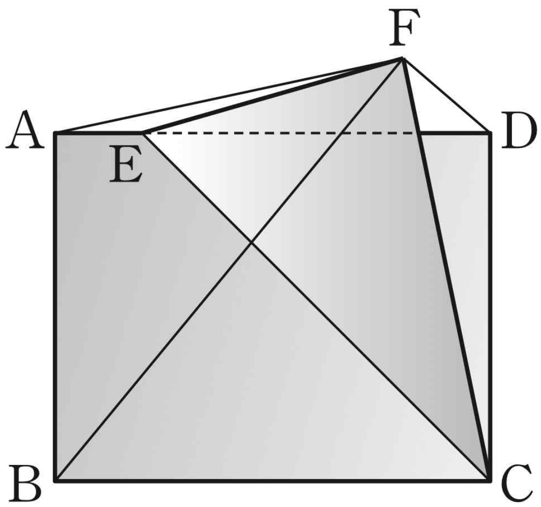
공간도형 Level 2 6번

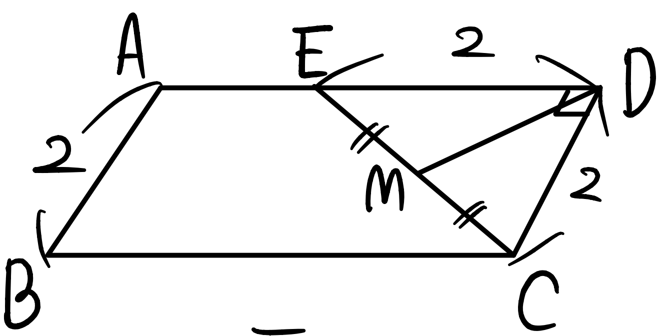
그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}>2$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AD 위에 $\overline{DE}=2$인 점 E가 있다. 선분 CE를 접는 선으로 하여 평면 ABCD와 이루는 각의 크기가 $45°$가 되도록 삼각형 DEC를 접어 올려 생긴 삼각형을 삼각형 FEC라 하자. 두 평면 FAB, FCD가 평면 ABCD와 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자.

$\tan\theta_1\tan\theta_2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$일 때, 삼각형 FAB의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는?

(단, 점 F의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 CDE의 내부에 존재한다.)

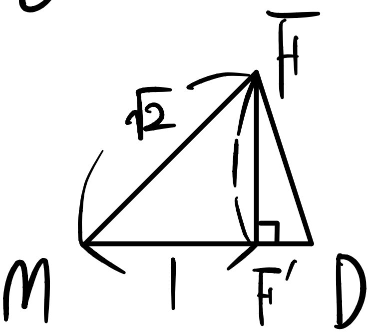
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$





$\overline{MD}=\overline{MF}=\sqrt{2}$

$\angle FMD=45°$



$\overline{DF'}=\sqrt{2}-1$

다음 페이지에

공간도형 Level 2 6번

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}>2$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AD 위에 $\overline{DE}=2$인 점 E가 있다. 선분 CE를 접는 선으로 하여 평면 ABCD와 이루는 각의 크기가 45°가 되도록 삼각형 DEC를 접어 올려 생긴 삼각형을 삼각형 FEC라 하자. 두 평면 FAB, FCD가 평면 ABCD와 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하자.

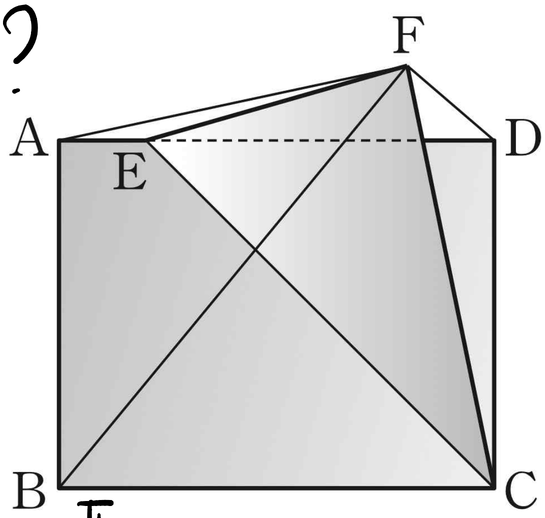
$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$일 때, 삼각형 FAB의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는?

(단, 점 F의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 CDE의 내부에 존재한다.)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{6}$　　⑤ $2\sqrt{2}$

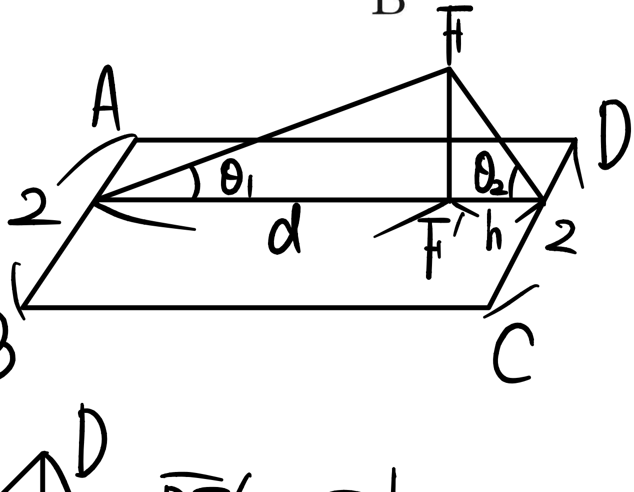
F'AB의 넓이는?

$\boxed{d=?}$

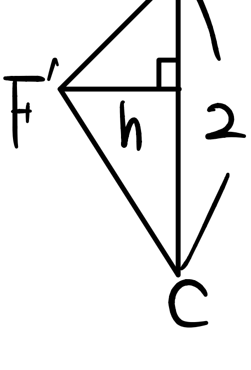


$\overline{FF'}=1$

$\overline{DF'}=\sqrt{2}-1$



$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = \dfrac{1}{d} \times \dfrac{1}{h} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$



$\overline{DF'} = \sqrt{2}h = \sqrt{2}-1$

$\therefore \dfrac{1}{h} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$= 2+\sqrt{2}$

$\boxed{\therefore d=2}$

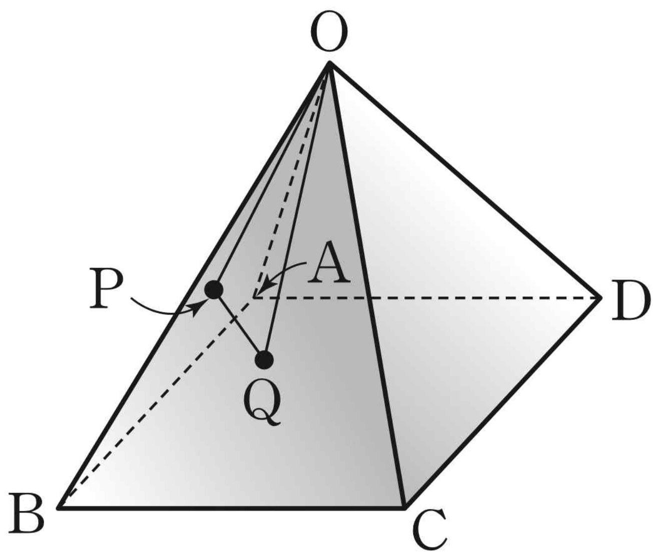
① OPQ 넓이 구하고 평면 OPQ, ABCD 이면각 구하기 (별로)

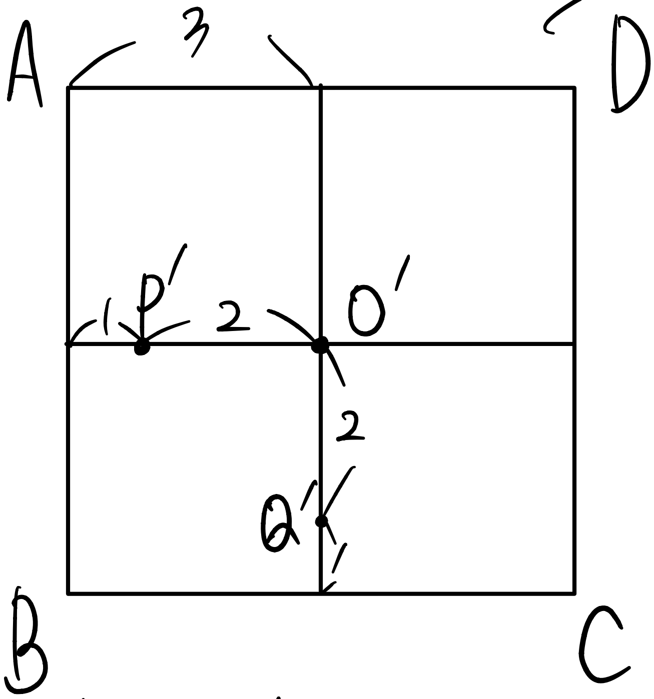
② O'P'Q' 넓이 구하기 (좋아요)

공간도형 Level 2 7번

그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정사각뿔 O－ABCD에서 두 삼각형 OAB, OBC의 무게중심을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 OPQ의 평면 ABCD 위로의 정사영의 넓이는?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

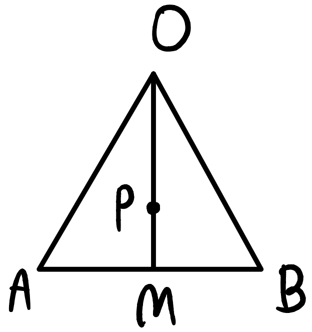




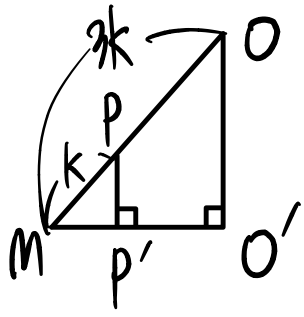
O'P'Q' 넓이 = 2

왜?

$\overline{AB}$ 중점 M



$\overline{OM} : \overline{PM} = 3:1$



$\overline{O'M} : \overline{P'M} = 3:1$

Q도 마찬가지

공간도형 Level 3 1번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD를 한 밑면으로 하는 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. $\overline{AE}>1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

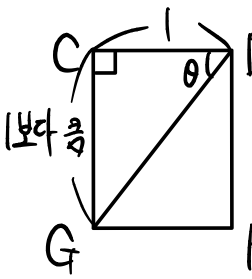
ㄱ 두 직선 AB, DG가 이루는 예각의 크기는 45° 보다 크다.

ㄴ 두 직선 AF, EG가 이루는 예각의 크기는 60° 보다 크다.

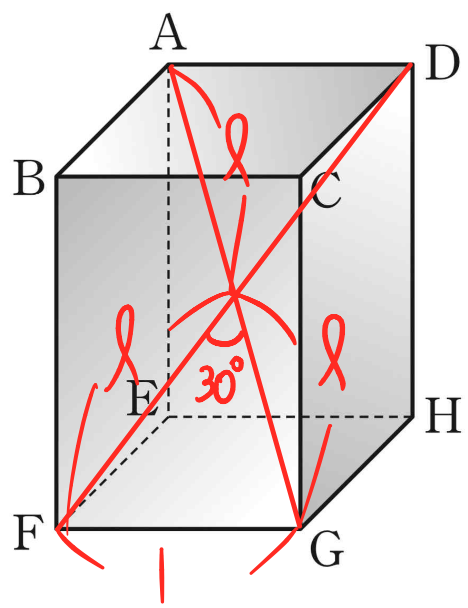
ㄷ 두 직선 AG, DF가 이루는 예각의 크기가 30° 이면 $\overline{AF}^2=7+4\sqrt{3}$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

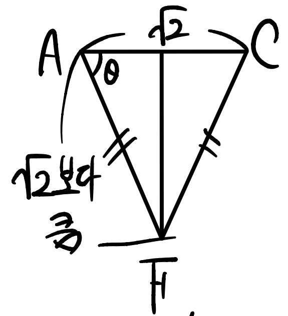
ㄱ. CD, DG가 이루는 각의 크기



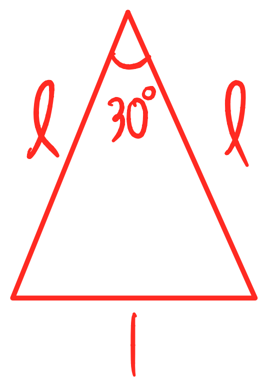
$\tan\theta > 1$ 이므로 맞음



ㄴ. AF, AC가 이루는 각의 크기



$0<\cos\theta<\frac{1}{2}$ 이므로 맞음



$$1^2 = 2l^2 - 2l^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = l^2(2-\sqrt{3})$$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AG}^2 - 1 = 4l^2 - 1 = \frac{4}{2-\sqrt{3}} - 1 = 4(2+\sqrt{3}) - 1 = 7+4\sqrt{3}$$ 맞음

공간도형 Level 3 2번

그림과 같이 $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=3$, $\overline{OC}=1$인 사면체 OABC에 대하여 꼭짓점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 ABC의 내심이다.

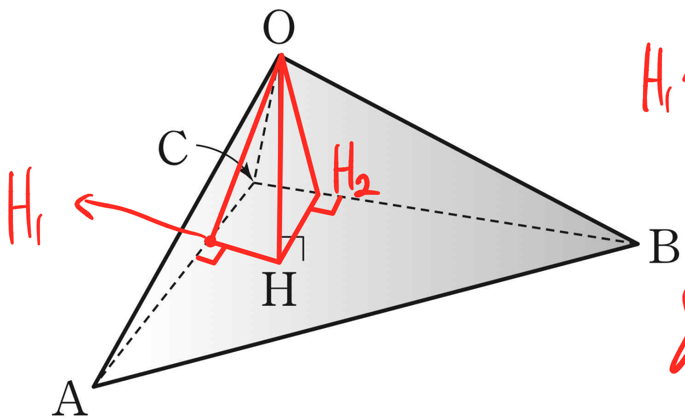
$\angle BOC - \angle AOC = 10^\circ$ 일 때, $(\overline{BC}-\overline{AC})^2 = a + b\cos 10^\circ$ 이다. $a+b$의 값은?

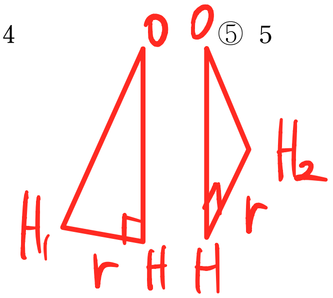
(단, a, b는 정수이고, $\cos 10^\circ$는 무리수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\overline{BC}-\overline{AC}$

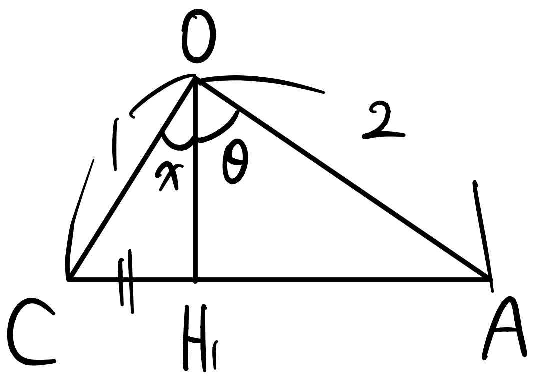
$= \overline{BH_2}-\overline{AH_1}$

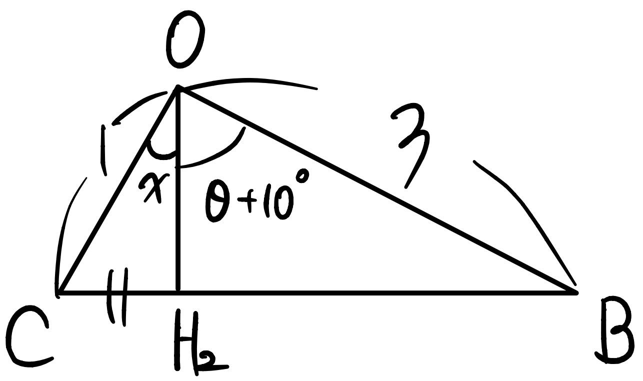


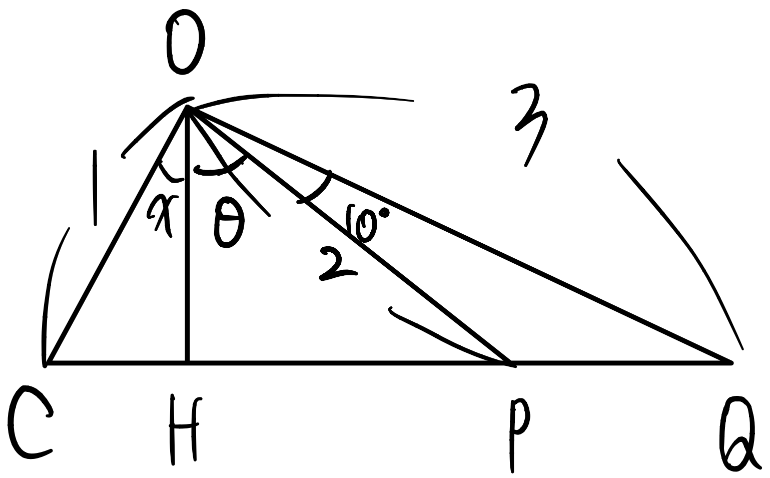


두 삼각형 합동

& $\overline{CH_1}=\overline{CH_2}$







$\overline{AH_1} = \overline{PH}$

$\overline{BH_2} = \overline{QH}$

$\overline{BH_2} - \overline{AH_1} = \overline{PQ}$

$\overline{PQ}^2 = 9+4-2\times3\times2\times\cos10^\circ \longrightarrow a=13,\ b=-12$

이런 거 (이차곡선 + 공간도형) 수능에 나오기 힘듦.

나와도 그냥 풀면 되긴 함. 수능에 나온다면 아마 9평에서 예고해줄 듯.

공간도형 Level 3 3번

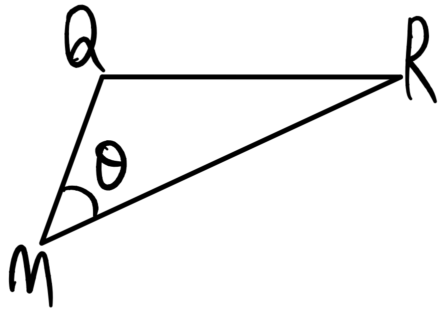
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AE}=2$, $\overline{AD}>2$인 직육면체 ABCD−EFGH에 대하여 타원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

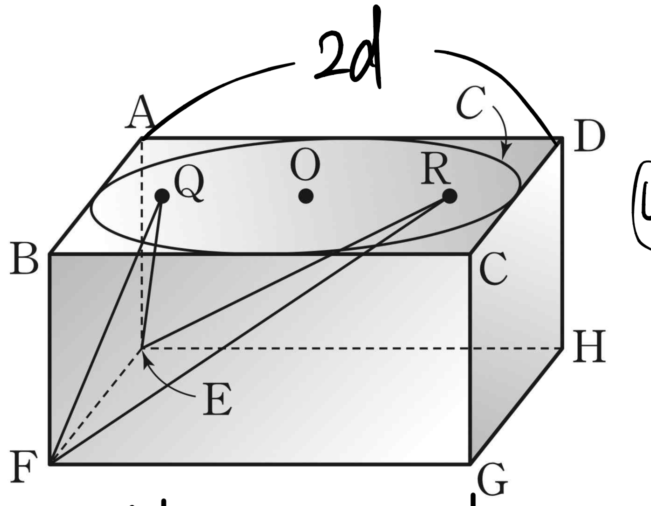
> (가) 타원 C는 네 꼭짓점에서 직사각형 ABCD의 네 변에 각각 접한다.
> (나) 타원 C의 중심을 O라 하면 두 평면 OEF, OGH가 서로 수직이다.

타원 C의 두 초점 중 점 A에 가까운 점을 Q, 나머지 한 초점을 R라 하고, 두 평면 QEF, REF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

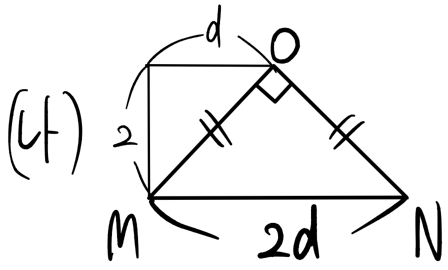
교선 EF

$\overline{EF}$ 중점 M





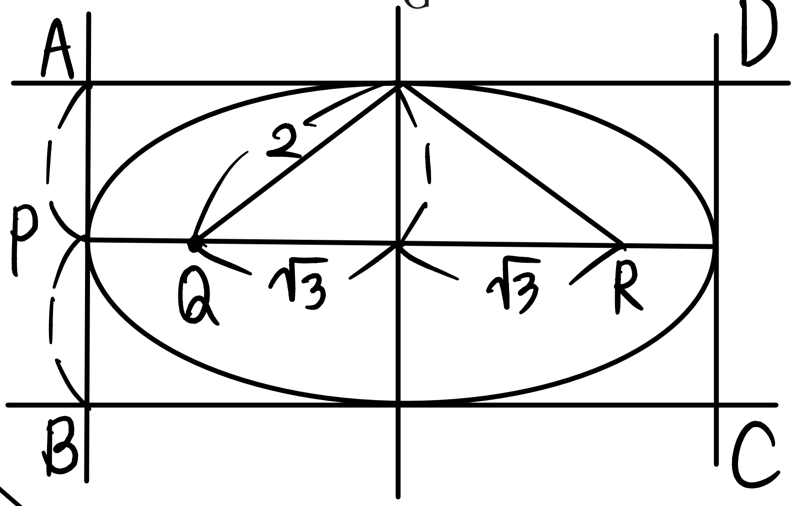
$\overline{GH}$ 중점 N

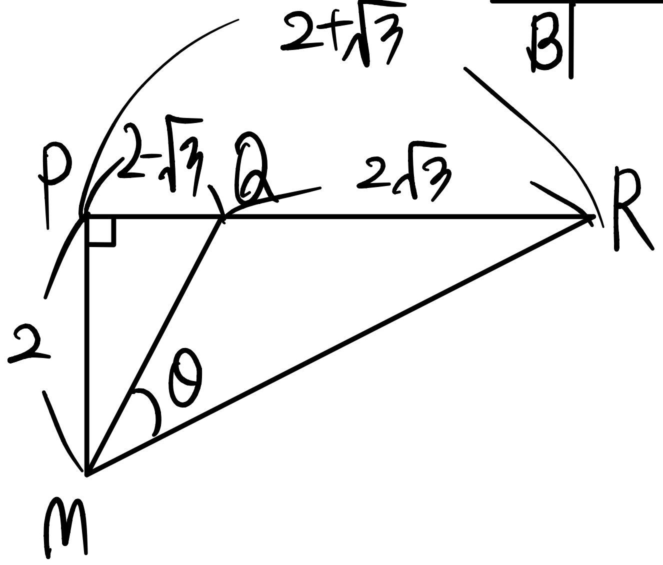


$d=2$

타원 장축 길이 $2d=4$

단축 길이 2





더러운 코사인 법칙 계산

$$\cos^2\theta=\frac{25}{73}$$

$\boxed{98}$

해설 보니까 아무리 계산할 때 벡터 썼네요.

여러모로 문제가 아쉽네요.

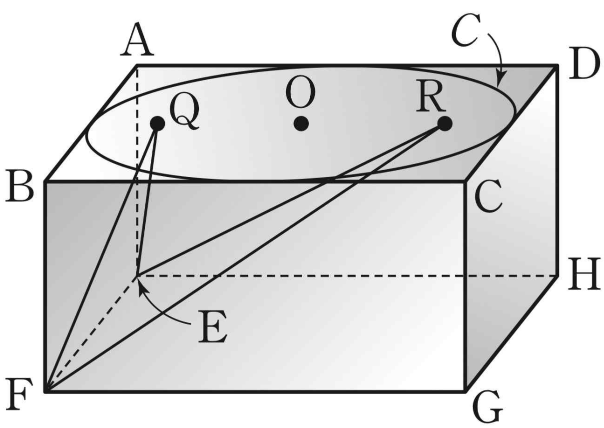
공간도형 Level 3 3번

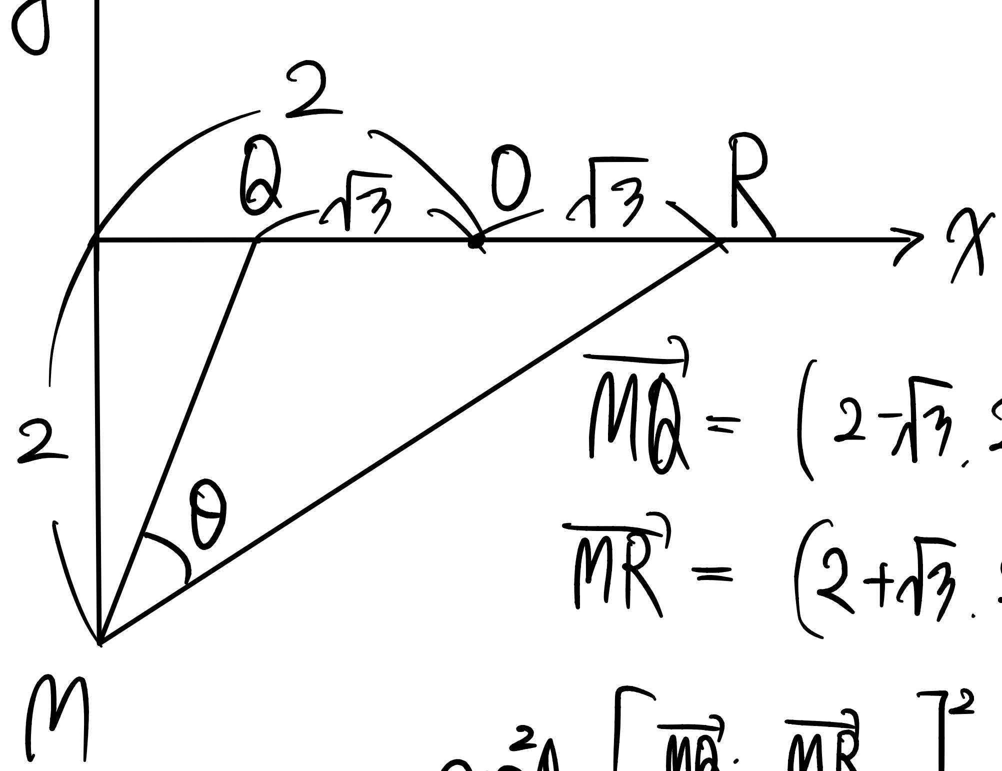
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AE}=2$, $\overline{AD}>2$인 직육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 타원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 타원 C는 네 꼭짓점에서 직사각형 ABCD의 네 변에 각각 접한다.
> (나) 타원 C의 중심을 O라 하면 두 평면 OEF, OGH가 서로 수직이다.

타원 C의 두 초점 중 점 A에 가까운 점을 Q, 나머지 한 초점을 R라 하고, 두 평면 QEF, REF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)





$\overrightarrow{MQ}=(2-\sqrt{3},\ 2)$

$\overrightarrow{MR}=(2+\sqrt{3},\ 2)$

$$\cos^2\theta=\left[\frac{\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MR}}{|\overrightarrow{MQ}|\,|\overrightarrow{MR}|}\right]^2=\frac{25}{73}$$

$\boxed{98}$

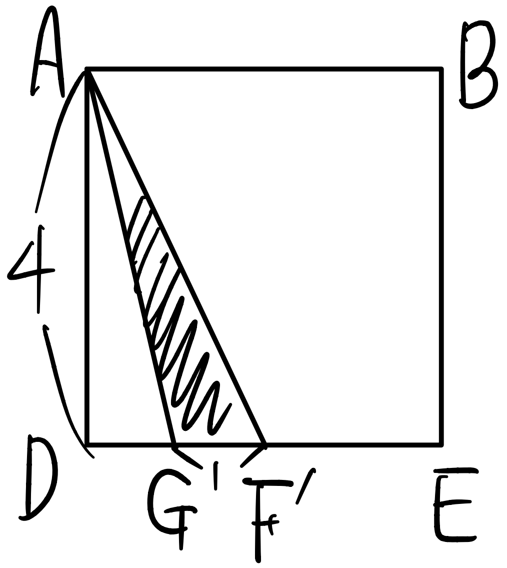
$$S\cos\theta_n = S_n \rightarrow \cos\theta_n = \frac{S_n}{S} \longrightarrow \frac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i} = \frac{S_j}{S_i}$$

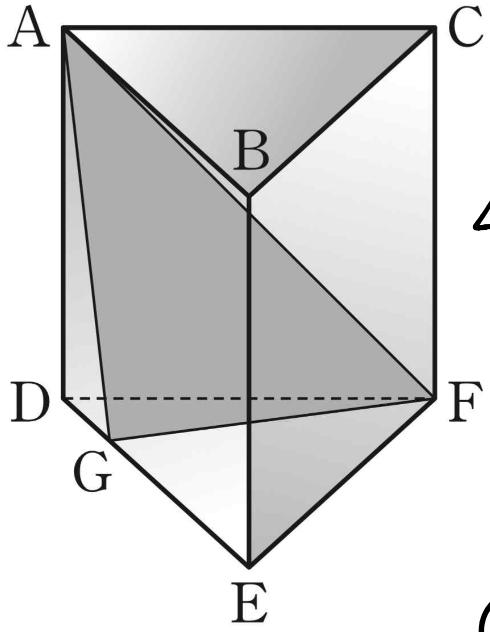
공간도형 Level 3 4번

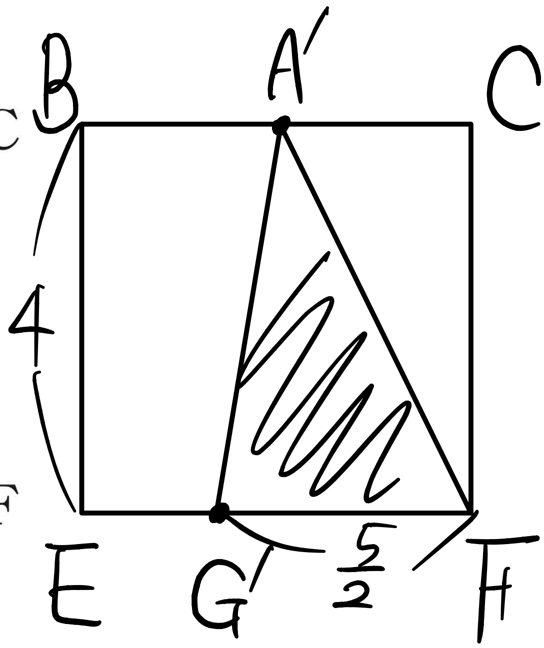
그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4인 삼각기둥 ABC－DEF가 있다. 선분 DE를 1:3으로 내분하는 점을 G라 하고, 평면 AGF와 삼각기둥 ABC－DEF의 세 개의 옆면이 이루는 예각의 크기를 각각 θ_1, θ_2, θ_3이라 할 때, $\dfrac{\cos\theta_j}{\cos\theta_i}$의 최댓값은?

(단, i, j는 모두 1 이상 3 이하인 자연수이다.)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

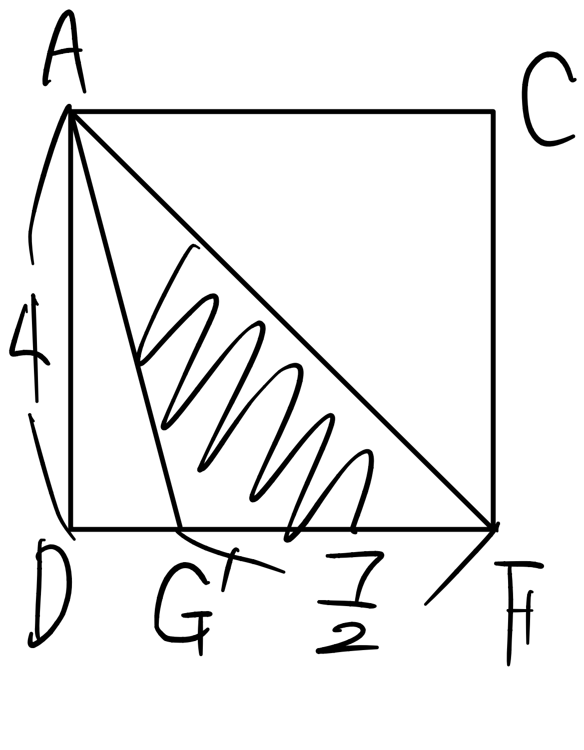






$S_1 = 2$

$S_2 = 4$



$S_3 = 7$

$\therefore$ $i=1$, $j=3$일 때

최대 $= \frac{7}{2}$

BCD 무게중심 G.

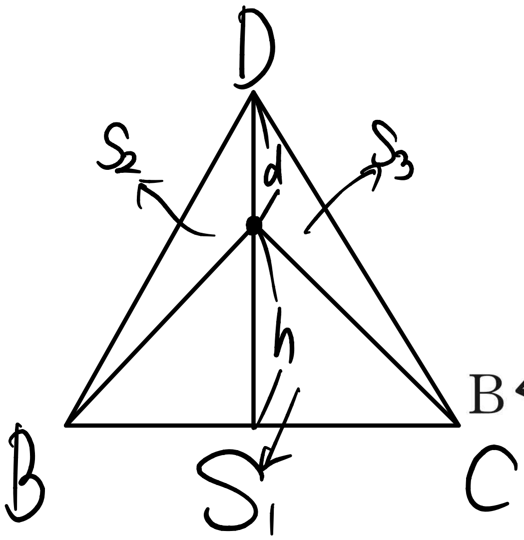
P'은 선분 GD 위에 있음.

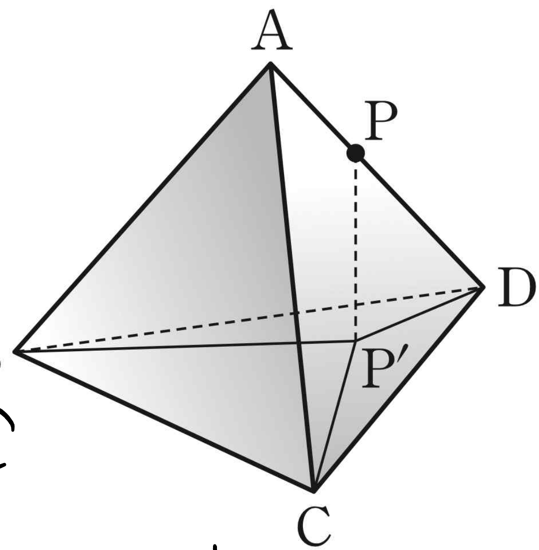
공간도형 Level 3 5번

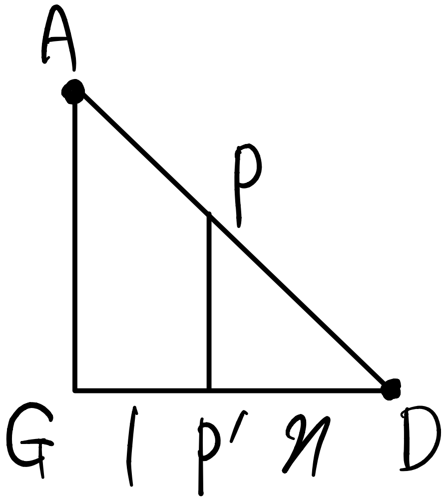
그림과 같이 정사면체 ABCD에서 모서리 AD를 $1:n$으로 내분하는 점을 P라 하자. 점 P의 평면 BCD 위로의 정사영을 P′이라 하고 세 삼각형 P′BC, P′CD, P′DB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1=S_2+2S_3$일 때, 양수 n의 값은?

$\overline{AP}:\overline{PD}=\overline{GP'}:\overline{P'D}$

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$



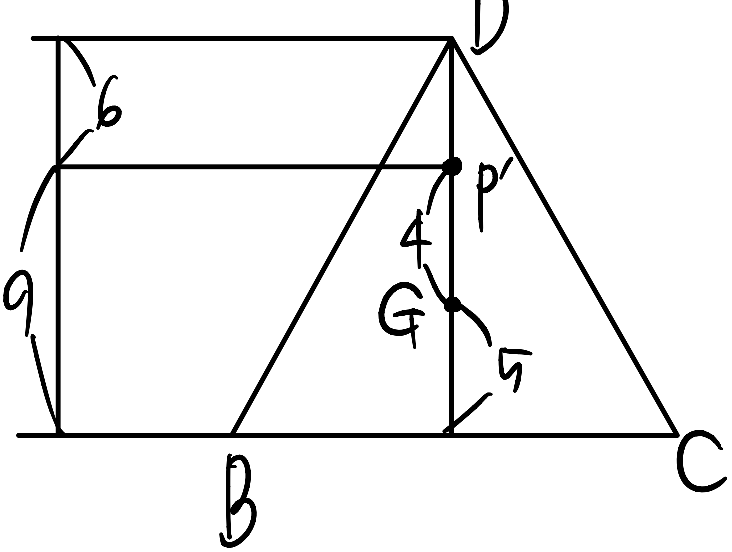




$S_2=S_3 \longrightarrow S_1=3S_2 \longrightarrow$ 높이 $S_1:S_2=3:1$

$h:d\sin30^\circ=3:1 \longrightarrow h:d=3:2$

h+d가 3의 배수가 되도록 설정 $h=9$. $d=6$



$\overline{GP'}:\overline{P'D}=1:n=4:6$

$\therefore n=\frac{3}{2}$

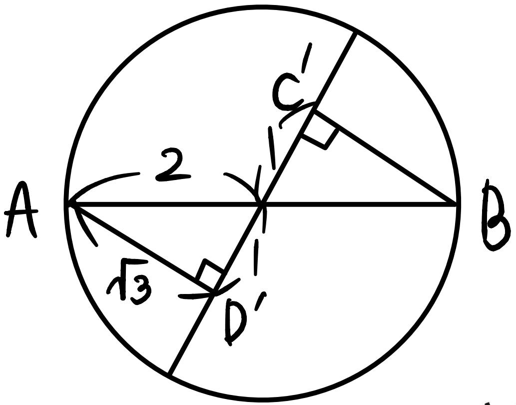
$$\frac{11}{4}\pi \times \frac{1}{7} = \frac{11}{28}\pi$$

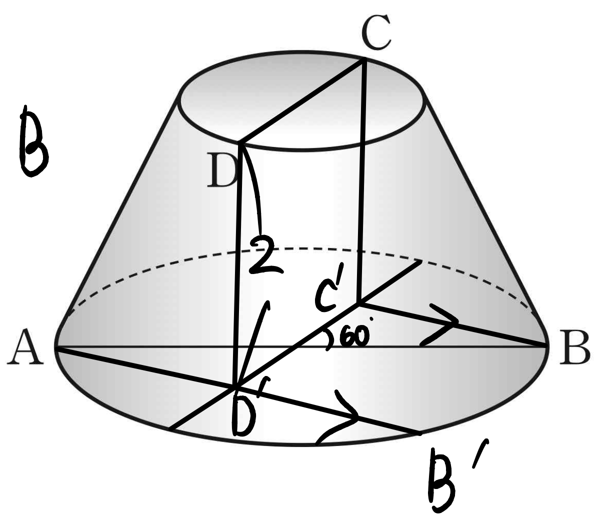
공간도형 Level 3 6번

그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

2선 CD

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$

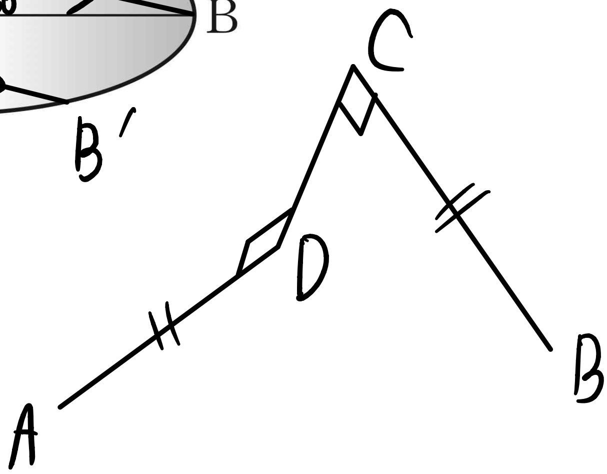


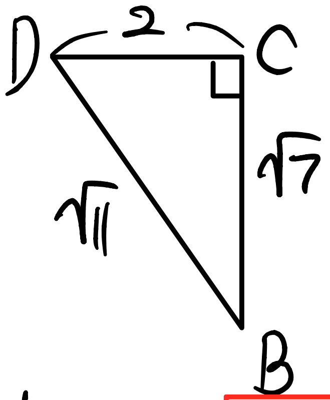


$\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{7}$

$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{11}$

$\overline{CD} = 2$

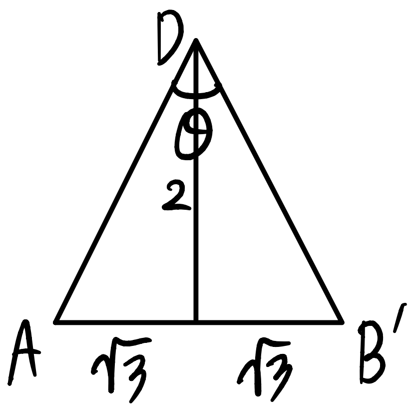




외접원 넓이 $\boxed{\frac{11}{4}\pi}$

θ = AD, BC가 이루는 각의 크기

= AD, B'D가 이루는 각의 크기



$$\cos\theta = \frac{4-3}{4+3} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

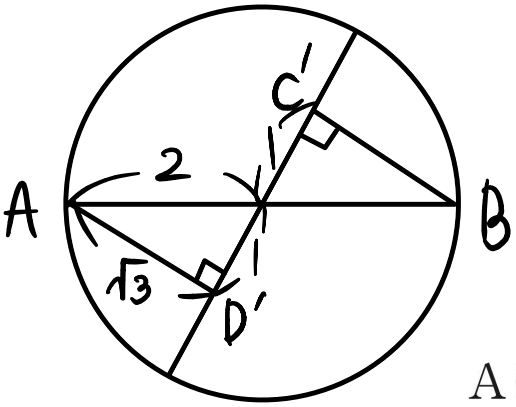
다른 풀이 1 (교과 외)

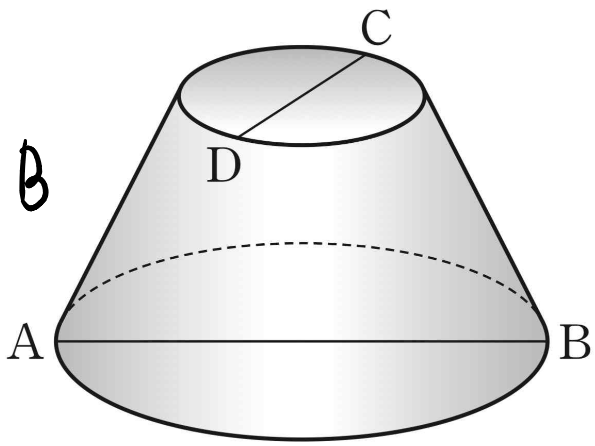
: 외접원 넓이 $\frac{11}{4}\pi$ 구한 이후 벡터 이용

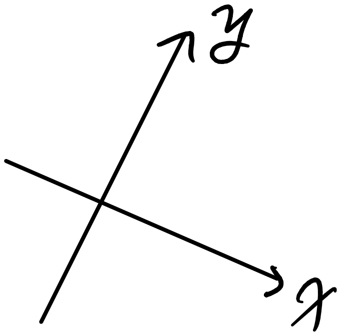
공간도형 Level 3 6번

그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60°일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{2}{7}\pi$　③ $\frac{9}{28}\pi$　④ $\frac{5}{14}\pi$　⑤ $\frac{11}{28}\pi$







$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기 θ

$\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 0, 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 0, 2)$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|-3+4|}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$$

Q. 좌표축을 왜 저렇게 잡나요? $A(-2, 0, 0)$ $B(2, 0, 0)$ $D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$ $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$로 잡으면 안 될까요?

A. 그렇게 하셔도 됩니다만 좌표축을 잘 잡으려면 (계산을 적게 하려면) 서로 수직인 3개의 직선이 눈에 보일 때, 그 직선들을 좌표축으로 설정하는 게 좋습니다. 세 직선 AD', $D'C'$, $D'D$가 서로 수직입니다.

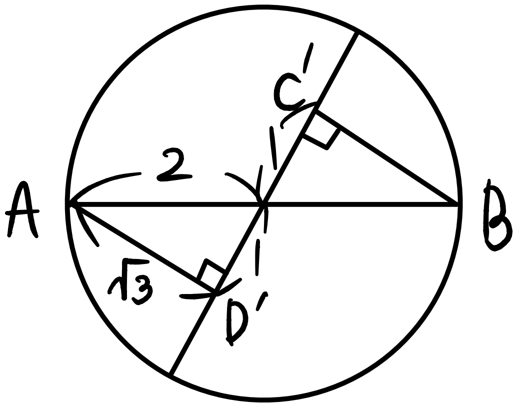
다른 풀이 2 (교과 외)

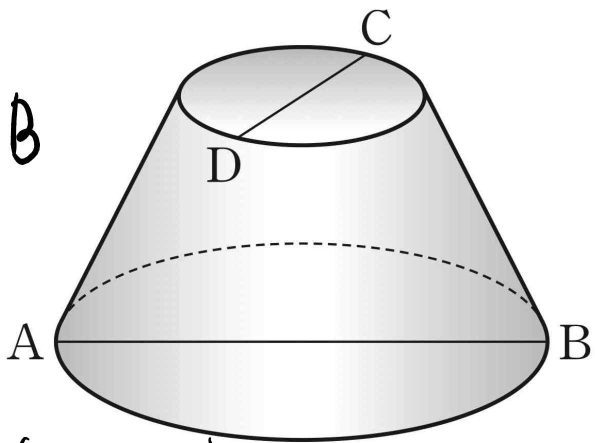
: 좌표로 시작 → 평면의 방정식 완성

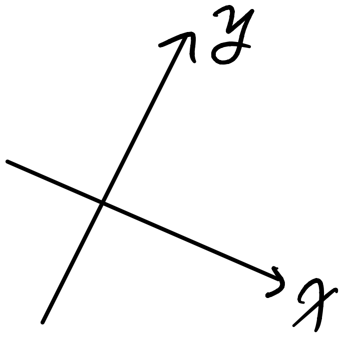
공간도형 Level 3 6번

그림과 같이 한 밑면은 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원이고 다른 한 밑면은 길이가 2인 선분 CD를 지름으로 하는 원이며 높이는 2인 원뿔대가 있다. 두 직선 AB, CD가 이루는 예각의 크기가 60° 일 때, 삼각형 BCD의 외접원의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{2}{7}\pi$ ③ $\frac{9}{28}\pi$ ④ $\frac{5}{14}\pi$ ⑤ $\frac{11}{28}\pi$ ✓







$A(-\sqrt{3}, 0, 0)$

$D'(0, 0, 0)$ $D(0, 0, 2)$

$C'(0, 2, 0)$ $C(0, 2, 2)$

$B(\sqrt{3}, 2, 0)$

$\overline{CD} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{7}$, $\overline{BD} = \sqrt{11}$

$\longrightarrow$ 외접원 넓이 $\frac{11}{4}\pi$

평면 BCD $\perp \vec{n_1}$: $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{z}{2} = 1 \longrightarrow 2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}$

평면 ACD $\perp \vec{n_2}$: $-\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{z}{2} = 1 \longrightarrow -2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}$

$\vec{n_1} = (2, 0, \sqrt{3})$

$\vec{n_2} = (-2, 0, \sqrt{3})$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|-4+3|}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{1}{7}$$

평면의 방정식 세우는 자세한 과정

NOTE

$abc \neq 0$ 인 세 실수 a, b, c 에 대하여
세 점 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 를 지나는 평면의 방정식은
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 이다.

$A(-\sqrt{3}, 0, 0)$ $C(0, 2, 2)$
$B(\sqrt{3}, 0, 0)$ $D(0, 0, 2)$

평면 BCD ?

$B(\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$ 지나고, y 절편을 모르므로 $\frac{x}{\sqrt{3}} + by + \frac{z}{2} = 1$ 로 둘 수 있다.
만약 $b \neq 0$ 이라면 이 평면은 C를 지날 수 없다.
그러므로 평면 BCD의 방정식은 $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{z}{2} = 1$ 이고,
이는 곧 $2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}$ 이다. 이 평면은 y축과 만나지 않는다.

평면 ACD ?

$A(-\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$ 지나고, y 절편을 모르므로 $-\frac{x}{\sqrt{3}} + by + \frac{z}{2} = 1$ 로 둘 수 있다.
만약 $b \neq 0$ 이라면 이 평면은 C를 지날 수 없다.
그러므로 평면 ACD의 방정식은 $-\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{z}{2} = 1$ 이고,
이는 곧 $-2x + \sqrt{3}z = 2\sqrt{3}$ 이다. 이 평면은 y축과 만나지 않는다.