제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 4^{\frac{-\sqrt{3}}{2}+1}$ [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{\sqrt{3}} \times 2^{-\sqrt{3}+2} = 4$

2. 함수 f(x)가

$f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f(1) = 1$

을 만족시킬 때, f(2)의 값은? [2점]

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$f = x^3 - 2x^2 + 2 \rightarrow 2$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = -\frac{3}{2}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{\sqrt{13}}$ ② 0 ③ $\frac{1}{\sqrt{13}}$ ④ $\frac{2}{\sqrt{13}}$ ⑤ $\frac{4}{\sqrt{13}}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{2}$ $\xrightarrow{\text{제곱}} 9$, $\rightarrow 4$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 = \frac{13}{9+4}$

$\sin\theta = \frac{-3}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

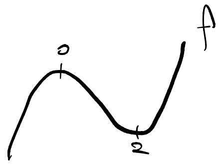
4. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 4$, $\frac{a_5}{a_2} = 2$일 때, a_7의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$r^3 = 2 \rightarrow a_7 = 2^2 \times 4 = 16$

5. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+8$가 x=a에서 극소일 때, a+f(a)의 값은? [3점]

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 10



$\rightarrow a=2$

$f(2)=8-12+8=4$

$2+4=6$

6. 방정식 $\log_2(x-4)+\dfrac{1}{\log_x 2}=5$을 만족시키는 실수 x의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 7　⑤ 8

$\log_2(x-4)x=5$

$x>4,\ x^2-4x-32=0$

$\therefore x=8$

7. 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)+b$가 닫힌구간 $[2,10]$에서 최댓값 4, 최솟값 2를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\log_{\frac{1}{3}}(2-a)+b=4$

$\log_{\frac{1}{3}}(10-a)+b=2$

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2-a}{10-a}=2 \rightsquigarrow a=1,\ b=4$

8. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & (x<a) \\ 5x+b & (x \geq a) \end{cases}$

가 실수 전체 집합에서 미분가능 할 때, a-b의 값은? (단, a,b는 상수이다.) [3점]

① 16 ② 20 ③ 22 ④ 25 ⑤ 26

f' + 미가 ~ $2a-3=5$ $a=4$

$4^2-3\times4=5\times4+b$ $b=-16$

약간의 센스: 구간변형

9. 수열 $\{a_n\}$에대해 $a_n=\sum_{k=n}^{2n-1}(k-n+1)(k-2n+2)$ 을 만족한다.

이때, $|a_{12}|$의 값을 구하시오. [4점]

① 208 ② 212 ③ 220 ④ 228 ⑤ 232

$a_n=\sum_{k=1}^{n}k(k-n+1)$

$a_{12}=\sum_{k=1}^{12}k(k-11)$

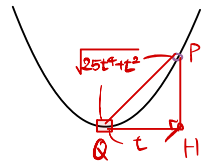
$=\frac{12\times13\times25}{6}-11\times\frac{12\times13}{2}$

$=650-858=-208$

$\boxed{208}$,,

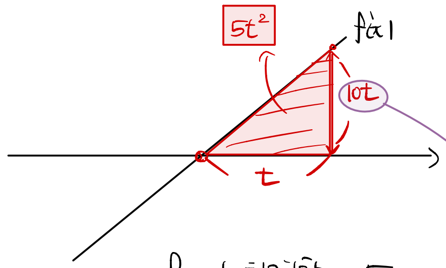
10. 점 Q를 꼭짓점으로 하는 이차함수 f(x)위의 임의의 점 P에 대해, ~~점~~ P의 x좌표와 Q의 x좌표의 차를 t라하자. 이때, 선분 PQ의 길이를 x(t)라 할때, $x(t)=\sqrt{25t^4+t^2}$ 이다. $t=3$일 때, f(x)위의 점 P에서의 접선의 기울기의 크기는? [4점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40



~ $\overline{PH}=5t^2$ (이차함수이므로 바로 최고차항 5 도출하는게 이상적.)

이차함수의 함숫값 도함수 통해 이해하면 $f'(x)$가 직선이므로 이런식으로 표현가능.



∴ $f(x)$의 최고차항 = 5

$t=3$일때 기울기의 크기는 $|\pm10\times3|=30$,,

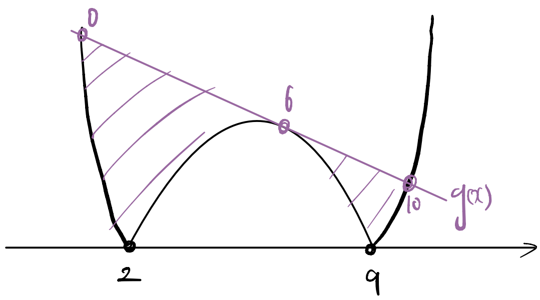
cf) 계수부호, t의 좌우 상관없이 동일

+ 그냥 점잡고 풀어도 나온다.

11. 이차함수 f(x)와 일차함수 g(x)에 대해 주어진 조건을 만족할 때, $|f(\alpha+3)|$의 값은? [4점]

(가) $|f(x)|$, $g(x)$가 세 개의 교점을 가지고 한점에서 접하고, 교점의 x좌표는 각각 $\alpha, \alpha+6, \alpha+10$ 이다. (나) $|f(x)|$, $g(x)$가 이루는 넓이의 값은 157이다.

① 6 ② 8 ③ 12 ④ 18 ⑤ 20



가) wlog ⟶ $\alpha=0$

f(x)를 최고차항이 A인 이차라 할때,

$f(x)-g(x)=Ax(x-10)$

$f(x)+g(x)=A(x-6)^2$

식정리하면 $f(x)=A(x-2)(x-9)$

나) f와 g가 이루는 넓이를 S_1, f와 x축이 이루는 넓이를 S_2라할때,

$S_1-2S_2=157$

$S_1=\frac{|A|}{6}\times10^3$, $S_2=\frac{|A|}{6}\times7^3$

$S_1-S_2=\frac{|A|}{6}\times314=157$ $\therefore |A|=3$

$\therefore |f(3)|=18$

12. 두 함수 $f(x)=2^{x-1}+3p$, $g(x)=-2^{-x+1}+3p$가 있다. (단, p는 0보다 큰 상수) 이때, 상수 k에 대해서 직선 $x=k$가 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 PQ의 길이가 최소일 때, 두 점 P, Q의 위치를 각각 A, B라 하자. 두점 A와 B, 함수 $y=f(x)$위의 점 C, 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

k=1일때 최소

$\because f(k)-g(k)=2^{k-1}+2^{1-k}$

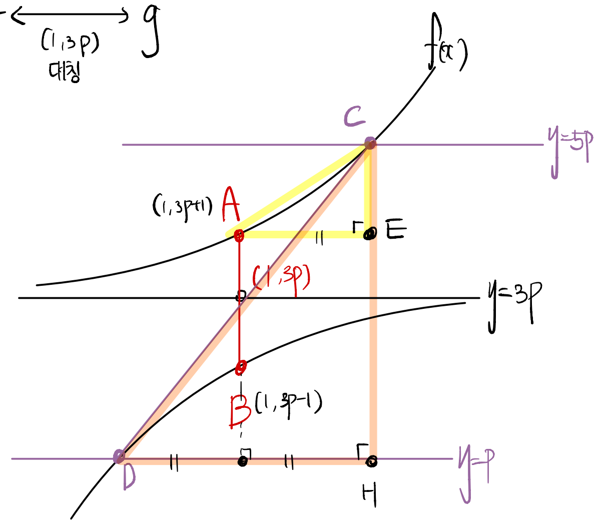
$2^{k-1}=2^{1-k}$일때 최소 (산술기하)

(가) 선분 AB의 중점과 선분 CD의 중점은 일치한다. (1,3p) C/D (1,3p)대칭! (나) 점 C의 y좌표는 점 D의 y좌표의 5배이다. ~ p/5p (다) 직선 CD의 기울기는 직선 AC의 기울기의 2배이다.

이때, 점 C의 y좌표 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 8 ⑤ 9

f ⟷ g (1,3p) 대칭



다) ~ $2\times\frac{\cancel{CE}^{\,2p-1}}{AE}=\frac{\cancel{CH}^{\,4p}}{\cancel{DH}_{\,2\times AE}}$

$\therefore 4p-2=2p$ ~ $p=1$ $\therefore$ C의 y좌표 $=5$

13. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대해 모든 $|f(2)|$들의 합은? [4점]

> (가) $h(x)=\overset{①}{f(|x-k|+k)}-\overset{②}{|f(x)|}$를 만족하는 함수 h(x)에 대해, 실수 전체 집합에서 미분가능하도록 하는 k가 존재한다.
> (나) $f(1)=f(5)=0$

① 3 ② 8 ③ 12 ④ 27 ⑤ 30

(가) 조건해석 ⟶ ①, ② 를 보니 미불의합 − 미불의합꼴이다.

실수전체 미분가능하려면 ①, ② 같은 점에서 미분불가능하지만, 서로 상쇄되거나 or 둘다 미분가능하겠다.

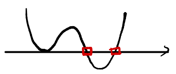
①은 $x=k$ 기준으로 오른쪽 부분의 그래프를 왼쪽으로 대칭시킨 상황으로 이해하자.

$f'(k)=0$ 일때 미분가능 이고, $f'(k)\neq 0$ 이면 미분불가능이겠지.

②는 너무 많이 나온 상황이니 생략.

(나) 에의해 $f(x)$ 다 x축과의 교점이 2개 이상임을 알수있다.

case1) $f(x)$ 교점 3개 이상



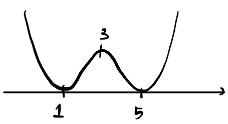
$|f|$가 2개 이상 미불

but $f(|x-k|+k)$ ~ 최대 1개상쇄 (×)

모순발생!

→ ∴ 교점이 2개 ,,

case1)



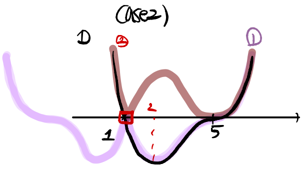
$|f|$ 실수전체 미가 ~ ① 미가이면 성립

$k=1, 3, 5$ → 미가이므로 성립!

$|f(2)|=9$,,

case2)

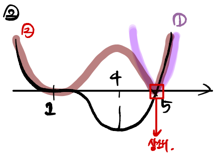
①



↳ $k=1$ 이면 실전미가? → (×)

상쇄 ×

②



↳ $k=5$ 이면 실전 미가

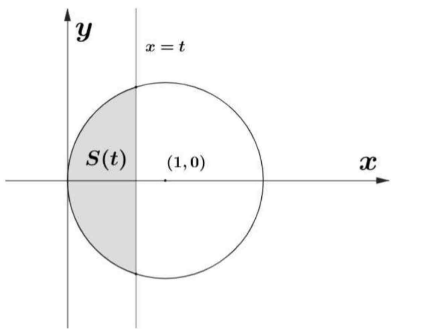
⇒ $|f(2)|=3$

∴ 12 ,,

+) 만약 case 2)의 ①의 미가 판단을 하지않고 틀렸다면 미가판단을 정확히하는 습관을 들이자.

14. 좌표평면 상에서 중심이 (1,0)이고, 반지름의 길이가 1인 원과 $x=t$가 이루는 넓이 중 왼쪽 부분의 넓이를 S(t)라 하자.

(단, $0<t<2$) x=t와 원이 만나는 두 교점사이의 거리를 R(t)라 할 때,



아래에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

> ㄱ. $S'(1)=R(1)$
> ㄴ. $S'(1)+S'(\frac{3}{2}) = 2+2\sqrt{3}$
> ㄷ. $\{S'(1)\}^2-\left\{\frac{S'(1+\sin 2\alpha)}{2}+1\right\}^2-\{\sin 2\alpha\}^2=4\sin^2\alpha$ (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$)

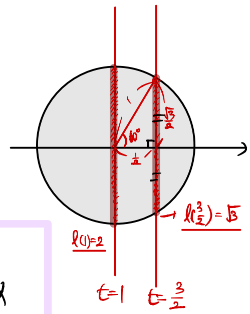
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\int_0^t l(x)\,dx = S(t)$

∴ $S'(t)=l(t)$ → (○)

ㄴ. $S'(1)+S'(\frac{3}{2})=l(1)+l(\frac{3}{2})$

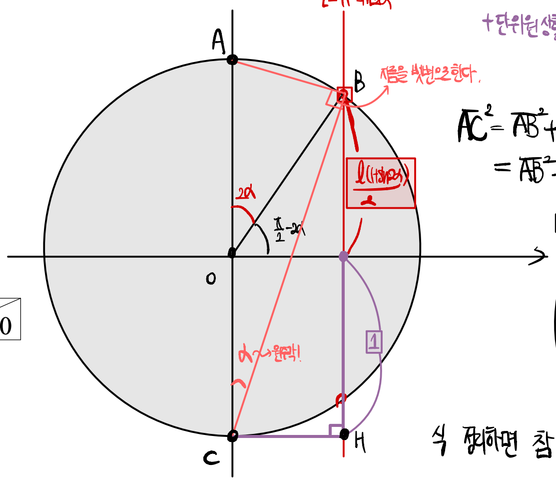
$l(1)=2$, $l(\frac{3}{2})=\sqrt{3}$ → (×)



ㄷ. $\{l(1)\}^2-\left\{\frac{l(1+\sin 2\alpha)}{2}+1\right\}^2-\{\sin 2\alpha\}^2=4\sin^2\alpha$

t의좌표로 표기하기위해 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$로 각을 잡자.

↳ 왠지 피타고라스같지 않나?ㅎ +단위원상황 ⟶ 기하적해석!



$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$=\overline{AB}^2+(\overline{HC}^2+\overline{BH}^2)$

↳ $\overline{AC}=2=l(1)$

$\overline{AB}=2\sin\alpha$

$\overline{CH}=\sin 2\alpha$

$\overline{BH}=\frac{l(1+\sin 2\alpha)}{2}+1$

식 정리하면 참 ,, :)

+) 미적이들은 덧셈법칙으로 끌 수있다. (just 계산..)

15. 공차가 0이 아닌 정수인 두 등차수열 a_n, b_n이 존재하고,

$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$라 할 때, 다음 조건을 만족한다.

(가) A_n+B_n은 공차가 13인 등차수열이다.
(나) $5|a_{11}-b_{11}|=3|a_{15}-b_{15}|$
(다) A_n의 최댓값이 존재하고, 그 최댓값을 M라 할 때, $M=11a_6$이다. ⟶ a_n의 공차<0 , $M=A_{11}=11a_6$

→ $a_{11}\geq 0$, $a_{12}\leq 0$!

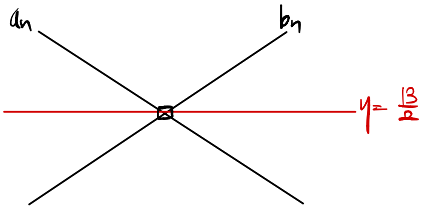
이때, b_1의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

가) $a_n+b_n = ☆n+□$ 꼴

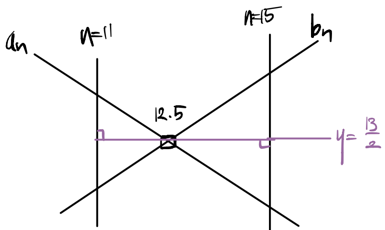
☆≠0 이라면 A_n+B_n 등차불가능 (∵ n에 대한 이차식)

∴ ☆=0 → 공차 절댓값동일 / 부호반대 , □=13 (∵ □=공차)



나) $\underbrace{|a_{11}-b_{11}| : |a_{15}-b_{15}|}_{\text{길이로 해석}} = 3:5$

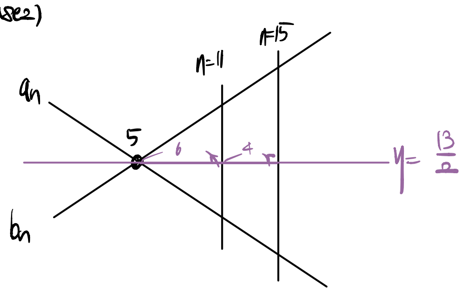
case1)



ㄴ 교차점기준 3:5 (∵ 닮음)

$a_{12}>0$ 이므로 (다)모순

case2)



$a_5=\frac{13}{2}$ ~> $a_{11}=\frac{13}{2}+6d$, $a_{12}=\frac{13}{2}+7d$

∴ $-6d \leq \frac{13}{2} \leq -7d$ (∵ $a_{11}\geq 0$, $a_{12}\leq 0$) ~> $d=-1$ (∵ 정수) $b_n=(n-5)+\frac{13}{2}$ ∴ $\boxed{b_1=\frac{5}{2}}$

단답형

16. $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+2x+3)}{x^2-9}$의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{9+6+3}{3}$

3

17. 미분가능한 함수 f(x)에 대해 $f(1)=2, f'(1)=3$이다. 이때, 함수 $g(x)=(2x^2+1)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$4f(1)+3f'(1)$

17

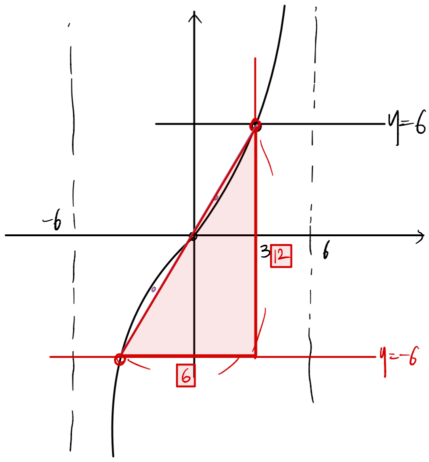
18. 수열 a_n에대해, $\sum_{n=1}^{5}\{a_n\}^2=30$, $\sum_{n=1}^{5}a_n=8$ 일 때, $\sum_{n=1}^{5}\{a_n+8\}^2$의 값을 구하시오. [3점]

↳ $a_n^2+16a_n+64$

$30+16\times8+64\times5$

$=350+128=478$

19. $-6<x<6$에서 함수 $y=6\tan\frac{\pi x}{12}$의 그래프와 두 직선 $x=3$, $y=-6$으로 둘러쌓인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]



36

20. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t (t≥0)에서의 속도는 $v(t)=ax^2+c$ (a, c는 상수) 이다. 시각 t=0에서 t=k까지 점 p가 움직인 거리를 $s(k)$, t=0에서 t=x까지 점 p의 위치 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k), x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

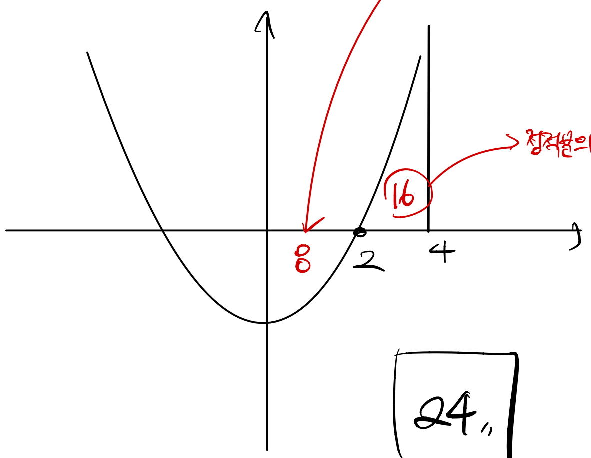
> (가) $0\le k<2$이면 $s(k)-x(k)<16$이다.
> (나) $k\ge2$이면 $s(k)-x(k)=16$이다.

상수 ~ 일정하다 ~ 변화율이 0이다.
↳ $v(2)=0$
$\therefore v(t)=a(t^2-4)$

이때, s(4)의 값을 구하시오. [4점]

$s'(k)=|v(k)|$, $x'(k)=v(k)$ → $s(k)-x(k)=\int_0^k |v(t)|-v(t)\,dt$

$16=2\int_0^2|v(t)|dt$



정적분의 비율관계

$\boxed{24}$

21. $20^a \times 50^b$의 n제곱근이 정수가 되도록 하는 자연수 a, b에 대해 $a+b$의 최솟값을 $f(n)$라 하자. 이때 $\sum_{n=2}^{24} f(n)$의 값을 구하시오. (단, n은 2이상의 자연수) [4점]

$20^a \times 50^b = 2^{2a} \times 5^a \times 5^{2b} \times 2^b$

$= 2^{2a+b} \times 5^{a+2b}$

<조건해석>

~ a/b가 자연수이므로 2a+b와 a+2b가 n의 배수임을 만족하는 a,b중 a+b가 최소일때의 값이 f(n)

sol 1) $\frac{2a+b}{n} = k_1$, $\frac{a+2b}{n} = k_2$ 이면 n제곱근이 정수! (k_1, k_2는 자연수)

$$\begin{cases} 2a+b = k_1 \cdot n \\ a+2b = k_2 \cdot n \end{cases}$$

$3(a+b) = (k_1+k_2) \cdot n$

$a+b = \frac{k_1+k_2}{3} \times n$

n이 3의배수 ~ $k_1+k_2=2$일때 최소

↳ $f(n) = \frac{2n}{3}$ (∵ a=b일때최소)

n ≠ 3의배수 ~ $k_1+k_2=6$일때최소

↳ $f(n) = 2n$ (∵ a=b일때최소)

cf) 왜 a=b 일때최소인지 정확한증명은 뒷페이지에..

$$\sum_{n=2}^{24} f(n) = \sum_{n=1}^{8} \frac{2n}{3} \times 3 + \sum_{n=2}^{24} 2n - 2 \times (3+6+\cdots+24)$$

$$= \sum_{n=2}^{24} 2n - \sum_{n=1}^{8} 4n$$

$= \boxed{454}$ //

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f(x)가 다음 조건을 만족한다.

> (가) f(x)와 x축이 오직 $x = \frac{1}{2}$에서만 교점을 가진다
>
> (나) 실수 t에대해 $\frac{f(t)}{t} \times x = f(x)$의 모든 실근의 곱을 h(t)라할 때, h(t)는 오직 t가 α_1, α_2일 때 불연속이다.
>
> (단, $t > \frac{1}{2}$)

$f'(1) = \frac{3}{4}$일때 f(4)의 값을 구하시오. [4점]

· 기울기함수로 접근 (∵ 2023.11.22)

해석: $\frac{f(t)}{t}$를 기울기로하는 직선과의 교점!

→ 근과 계수와의 관계!

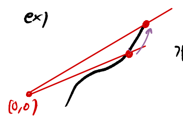
⊕ $\frac{f(t)}{t}x$는 상수항이 0이므로 세 실근을 가질때 h(t)는 $\frac{1}{2}$로 일정하다.

∴ h(t)가 불연속인 지점은 교점의 개수가 변할때! (접선근방관찰 ;;)

→ 실근 → 허근으로 바뀌면서 불연속 가능!

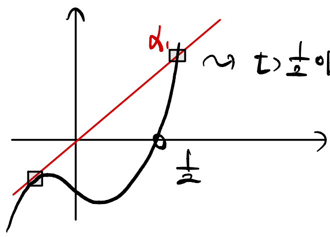
cf) 실근의 개수가 1개일때는 연속이다.

ex)



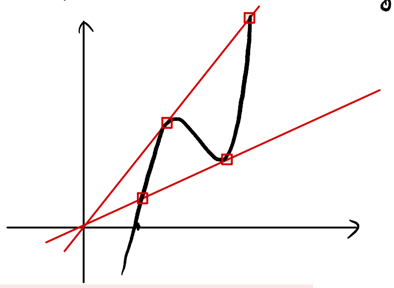
기울기가 바뀌어도 실근 개수일정!

case1) 변곡점의 x좌표 < $\frac{1}{2}$



~ $t > \frac{1}{2}$이므로 h(t) 불연속인 t 최대 1개.

case2) 변곡점의 x좌표 > $\frac{1}{2}$



이상하다... 이러면 접선의 교점이 총4개인데 불연속이 2개이다...

→ 뭔가 특이점이 있지 않을까?

~ x=1 에서 접하면연속!

∴ $f(x) = (x-1)^2(x-a) + kx$

$f'(1) = \frac{3}{4}$ ~ $k = \frac{3}{4}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - a) + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = 0$

∴ $a = 2$ → $f(4) = \boxed{21}$ //

• case2) 가 x=1에서 접할때 연속이되는 상황은 뒷장에 설명

+ 후기와 반응은 제작자에게 도움이 됩니다. 마음껏 품평해주세요.

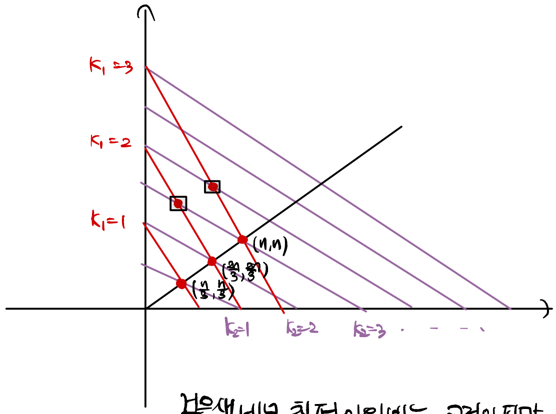
별해.

Sol 2)

a, b를 변수로 보자… $2x+y=k_1 n$, $x+2y=k_2 n$ 을 만족하는 그래프의 교점중 x, y좌표가 자연수인것이 a / b를 만족하겠지. (k_1, k_2는 자연수)

$k_1=k_2$일때 둘은 역함수 관계이므로 교점은 $y=x$위 항상존재 (∵ 감소함수)

$x=n$, $y=n$일때 주어진 동식을 항상 만족하니 범위내에서만 관찰해주자



검은색 네모 친 점이미에는 교점이지만 $x+y$ 의 값들이 $2n$ ((n,n)일때 항상 만족하므로 고려 x) 보다 큰것이 자명하므로 고려 X ⟶ 검은 네모 친 점의 좌표는 계산해보면 각각

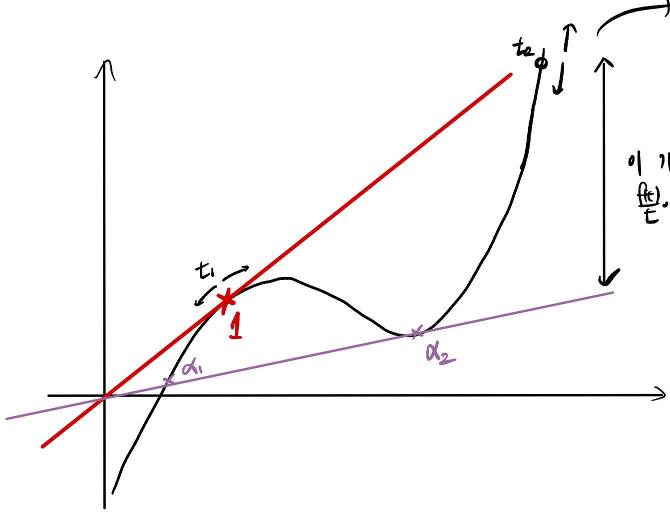
$(\frac{n}{3}, \frac{4n}{3})$, $(\frac{2n}{3}, \frac{5n}{3})$ 이 나온다. 둘다 $a+b=\frac{5}{3}n$ 꼴이므로 두경우모두 ① $a+2b$ / $2a+b$ 의 배수 / ② a, b 자연수 임을

만족하려면

- n이 3의배수일때 ⇝ $a+b=\frac{5}{3}n$, $\frac{7n}{3}$ ⟶ n이 3의배수일때도 $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$이 최소!
- $n \neq$ 3의배수 ⇝ $a+b \Rightarrow$ (X)

⇒ 따라서 고려 x !

#22



⟶ t_1 / t_2 좌우로 움직여도 $\hat{\alpha} \times 1 \times 1$ or $\hat{\alpha}$ 이므로 연속

이 기울기 안에서

$\frac{f(t)}{t} \cdot x = f(x)$ 교점 3개 ⇝ 일정(연속)