제 2 교시

수학 영역

Season 2

짝수형

빠른 정답

공통과목				확률과 통계		미적분		기하	
1	③	12	①	23	③	23	③	23	④
2	②	13	③	24	②	24	②	24	⑤
3	⑤	14	⑤	25	①	25	⑤	25	②
4	①	15	①	26	④	26	④	26	③
5	④	16	4	27	⑤	27	③	27	②
6	②	17	81	28	④	28	②	28	④
7	②	18	7	29	126	29	8	29	28
8	①	19	18	30	43	30	9	30	32
9	③	20	81						
10	⑤	21	24						
11	④	22	153						

공통과목 해설

1. [정답] ③

$$\log_2 9\times\log_3 8=2\log_2 3\times 3\log_3 2=2\log_2 3\times\frac{3}{\log_2 3}=6$$

2. [정답] ②

$f'(x)=4x-5$ 이므로 $f(2)=-1$, $f'(2)=3$ 이다.

$\therefore\ f(2)+f'(2)=2$

3. [정답] ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r>0)$라 하면

$$a_1 r=2,\quad a_1 r^3=3a_1 r^2+8$$

$$\Rightarrow 2r^2=3\times 2r+8\ \Rightarrow\ r^2-3r-4=0\ \Rightarrow\ (r+1)(r-4)=0$$

$$\Rightarrow r=4\,(\because\ r>0)$$

이다. $a_1 r=2=4a_1$ 이므로 $a_1=\frac{1}{2}$ 이다.

4. [정답] ①

$$\lim_{x\to -3+} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to 2-} f(x)=-1$$

이다.

$\therefore\ \lim_{x\to -3+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=-1-1=-2$ 이다.

5. [정답] ④

주어진 극한식이 수렴하므로 $3f(3)=15$이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to 3}\frac{xf(x)-15}{x-3}=f(3)+3f'(3)=2$$

6. [정답] ②

$\sin\theta\cos\theta<0$ 이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=16$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\sin\theta}=8\ \Rightarrow\ \sin\theta=\frac{1}{8}$$

따라서θ는 제2사분면의 각임을 알 수 있다.

$$\therefore\ \cos\theta=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=-\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

7. [정답] ②

$$\lim_{x\to a-} f(x)=-a^2+4a+4,\quad \lim_{x\to a+} f(x)=2a^2-2a+b$$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$$f(a)=-a^2+4a+4=2a^2-2a+b\ \Rightarrow\ 3a^2-6a+b-4=0$$

이다. 이때 a가 오직 하나이므로

$$\frac{D}{4}=9-3b+12=21-3b=0\ \Rightarrow\ b=7$$

이다. $3a^2-6a+3=0$에서 $a=1$이므로 $a+b=8$이다.

8. [정답] ①

$\overline{AB}=\frac{4}{3}\pi$ 이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, 점 B의 x좌표는 $\frac{5}{3}\pi$ 이고 두 점의 y좌표는 $\frac{1}{2}a$이다. 삼각형 PAB의 넓이가 최대이기 위해서는 점 P와 선분 AB 사이의 거리가 최대여야 하므로 $\mathrm{P}(\pi,\ -a)$이다. 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times\frac{3}{2}a=a\pi=2\pi$에서

$$a=2,\quad k=\frac{1}{2}\times a=1$$

이다. 따라서 $a+k=3$이다.

9. [정답] ③

$$\log_9\frac{12}{a}+\log_3\frac{18}{b}=\log_9\frac{12\times 18^2}{ab^2}=\log_9\frac{2^4\times 3^5}{ab^2}$$

이다. 따라서 $\frac{2^4\times 3^5}{ab^2}$의 값이 9 또는 81이 되어야 9에 대한 로그의 값이 자연수가 될 수 있다.

(ⅰ) $\dfrac{2^4\times3^5}{ab^2}=9$, $ab^2=2^4\times3^3$

a를 소인수분해하였을 때 2의 지수는 0 혹은 짝수, 3의 지수는 홀수이어야 한다. 즉 2의 지수로 가능한 값이 0, 2, 4이고, 3의 지수로 가능한 값이 1 혹은 3이므로 가능한 순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\times2=6$이다.

(ⅱ) $\dfrac{2^4\times3^5}{ab^2}=81$, $ab^2=2^4\times3$

a를 소인수분해하였을 때 2의 지수는 0 혹은 짝수, 3의 지수는 반드시 1이어야 한다. 즉 2의 지수로 가능한 값이 0, 2, 4이므로 가능한 순서쌍 (a, b)의 개수는 3이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서, 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6+3=9$이다.

10. [정답] ⑤

조건에서 언급된 접선의 방정식은 점 $(4, 6)$, $(-2, -6)$을 지나므로 $y=2x-2$임을 알 수 있다.
또한 삼차함수의 도함수는 이차함수이므로, $f'(4)=f'(0)$임을 알 수 있고 최고차항의 계수를 a라고 하면,

$$f'(x)=3ax(x-4)+2 \Rightarrow f(x)=ax^3-6ax^2+2x-10$$

이다. $f(4)=6$이므로 $a=-\dfrac{1}{4}$임을 알 수 있다.

$\therefore\ f'(2)=-\dfrac{3}{4}\times2\times(-2)+2=5$

11. [정답] ④

주어진 식에 $n=1$을 대입하면 $2-a_2=a_3$이고,
주어진 식에서 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하면

$$2a_n-a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1} \Rightarrow a_{n+2}=2a_n\ (n\geq2)$$

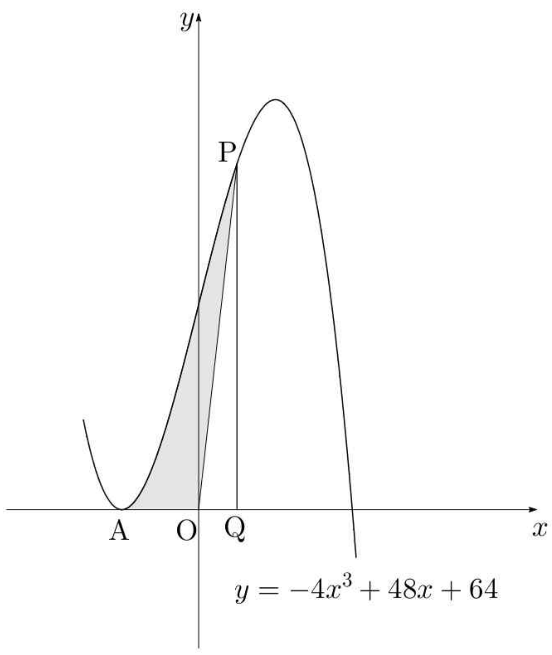
이다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}a_k&=a_1+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})+(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19})\\&=1+1023a_2+511a_3\\&=1+1023a_2+511(2-a_2)\\&=1023+512a_2\\&=-1\end{aligned}$$

이므로

$$a_2=-2 \Rightarrow a_4=-4$$

12. [정답] ①



점 P의 x좌표를 a라 하면, a는 방정식

$$-4a^3+48a+64=mx$$

의 양의 실근이다. 즉

$$ma=-4a^3+48a+64$$

이다.
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면, 곡선과 두 선분으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{a}-4x^3+48x+64\,dx-\triangle\mathrm{POQ}$$

와 같다.

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{a}-4x^3+48x+64\,dx-\triangle\mathrm{POQ}\\&=\Big[-x^4+24x^2+64x\Big]_{-2}^{a}-\frac{1}{2}a\times ma\\&=-a^4+24a^2+64a-(-16+96-128)-\frac{1}{2}a(-4a^3+48a+64)\\&=-a^4+24a^2+64a+48+2a^4-24a^2-32a\\&=a^4+32a+48\\&=81\end{aligned}$$

이므로 $a^4+32a-33=0$이다. 이를 인수분해하면 $(a-1)(a^3+a^2+a+33)=0$이며, 이 방정식은 유일한 양의 실근 $a=1$을 가진다.

$\therefore\ m=\dfrac{-4a^3+48a+64}{a}=108$

13. [정답] ③

직선 l의 방정식은 $y=-p$이다.
점 A의 좌표를 구하면

$$-3^x+2p=-p \Rightarrow 3^x=3p \Rightarrow x=1+\log_3p$$

이므로 $\mathrm{A}(1+\log_3p, -p)$이다.
점 B의 좌표를 구하면

$$-3^x+2p=3^x-p \Rightarrow 2\times3^x=3p \Rightarrow 3^x=\frac{3}{2}p$$

에서 $x=1+\log_3 p-\log_3 2$, $y=\frac{p}{2}$ 이므로,

$$B\left(1+\log_3 p-\log_3 2,\ \frac{p}{2}\right)$$

이다. 직선 AB의 기울기가

$$-\sqrt{3}=\frac{-\frac{3}{2}p}{\log_3 2}$$

이어야 하므로,

$$p=\frac{2\sqrt{3}}{3}\log_3 2 \Rightarrow 27^p=3^{3p}=2^{2\sqrt{3}}$$

14. [정답] ⑤

ㄱ. 두 점 P, Q의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)=x_1(t)-3t$라 하면

$$\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3 x_1{}'(t)dt=x_1(3)-x_1(1)=6$$

이고, 점 Q가 $t=3$에서 원점을 지나므로 $x_1(3)=9$이다.
이에 따라 $x_1(1)=3$임을 알 수 있고,
$x_2(1)-3=x_2(1)=0$이므로 점 Q의 위치가 0이다. 따라서 $t_1=1$임을 알 수 있다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의해 $t_1=1$이므로 점 Q는 $t=1$, $t=3$에서 원점을 지난다. 따라서 롤의 정리에 의해 점 Q의 속도가 0이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(1, 3)$에서 존재하고, 따라서 점 P의 속도 $v(t)$가 3이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(1, 3)$에서 존재한다. (참)

ㄷ. $t=1$에서 점 Q의 운동방향이 바뀌지 않도록 하는 경우는 다음 두 가지로 나누어 생각해볼 수 있다.

(ⅰ) $x_2(t)=(t-1)(t-3)^2(t-t_2)$인 경우
$x_2(0)=9t_2$, $x_2(1)=0$이므로 평균값정리에 의해
$v(t)-3=-9t_2$이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(0, 1)$에서 존재하며, 따라서 $v(t)=-9t_2+3$이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(0, 1)$에서 존재한다.

(ⅱ) $x_2(t)=(t-1)(t-3)(t-t_2)^2$인 경우
$x_2(0)=3t_2^2$, $x_2(1)=0$이므로 평균값정리에 의해
$v(t)-3=-3t_2^2$이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(0, 1)$에서 존재하며, 따라서 $v(t)=-3t_2^2+3$이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(0, 1)$에서 존재한다. 이때, $t_2>3$이므로
$-3t_2^2+3<-9t_2+3$이고, 이에 따라 $v(t)\le -9t_2+3$이도록 하는 실수 t가 열린구간 $(0, 1)$에서 존재한다. (참)

15. [정답] ①

조건 (가)에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ne -\frac{2}{3}$을 만족하는 자연수 n이 3, 5뿐이므로, 3, 5를 제외한 모든 자연수에 대하여

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{2}{3}$이 성립해야 한다. a_4, a_6에서만 변동이 생기는 등비수열이라고 생각해도 좋다. $a_1=81$이므로, $a_3=36$이고
(나) 조건에 의하여 $|a_6|$, $|a_5|$, $|a_4|$, $|a_3|$이 공차가 d인 등차수열이다.
$a_5=-\frac{2}{3}a_4$이므로 $|a_5|=\frac{2}{3}|a_4|$이다.
따라서 $|a_4|=3d$, $|a_5|=2d$라 할 수 있고,
$|a_3|=36=4d$이므로 $d=9$이다.
$a_6=9$ 혹은 -9이므로 a_6-a_2+d의 최댓값은 72이다.

16. [정답] 4

$32=2^5$이므로

$$2^{5-n}\ge 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 5-n\ge \frac{1}{2} \Rightarrow n\le \frac{9}{2}$$

이다. 따라서 자연수 n의 최댓값은 4이다.

17. [정답] 81

$f(x)$가 기함수이므로 $f(x)+f(-x)=0$을 만족한다.
또한 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$는 $F(x)=F(-x)$을 만족하므로

$$\int_0^{-1} f(x)dx=F(-1)-F(0)=F(1)-F(0)=\int_0^1 f(x)dx$$

이다. $\int_1^3 f(x)dx=-11$이므로 $\int_0^3 f(x)dx=-9$ 즉 $k=-9$이다.

$\therefore\ k^2=81$

18. [정답] 7

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$-4d=|a+2d|$에서 $d<0$임을 알 수 있다. 양변을 제곱하면

$$16d^2=a^2+4ad+4d^2 \Rightarrow (a-2d)(a+6d)=0$$

에서 $a=2d$ 또는 $a=-6d$임을 알 수 있다. 그러나 $a=2d$일 때, $a<0$이므로 첫째항이 양수라는 조건에 모순이다.
따라서 $a=-6d$이므로 $a_n=dn-7d$이다.
$kd-7d=0$에서 $k=7$이다.

[다른 풀이]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$-4d=|a+2d|$에서 $d<0$임을 알 수 있다. 또한

$$-4d=|a+2d| \Rightarrow -4d=a+2d \text{ 또는 } -4d=-(a+2d)$$
$$\Rightarrow a=-6d \text{ 또는 } a=2d$$

임을 알 수 있다. 그러나 $a=2d$일 때, $a<0$이므로 첫째항이 양수라는 조건에 모순이다.
따라서 $a=-6d$이므로 $a_n=dn-7d$이다.
$kd-7d=0$에서 $k=7$이다.

19. [정답] 18

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$-2+a+b=b-a+2 \to a=2$$

이다.

$$f'(x)=\begin{cases} 6x^2+4x & (|x|<1) \\ 2bx+2 & (|x|>1) \end{cases}$$

이므로 $f'(2)=4b+2$이다.

(i) $x=1$에서 미분가능하고 $x=-1$에서 미분가능하지 않은 경우

$$2b+2=10,\ -2b+2\neq 2 \Rightarrow b=4 \Rightarrow f'(2)=18$$

(ii) $x=-1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 미분가능하지 않은 경우

$$-2b+2=2,\ 2b+2\neq 10 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f'(2)=2$$

$\therefore$ ($f'(2)$의 최댓값)$=18$

20. [정답] 81

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이다.

$x^2f(x)-7=h(x)$라고 하면, $g(x)$의 연속조건에 의하여

$$\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)}{2-2x^4}=\lim_{x\to-1+}f(x)=f(-1)$$

인데, 이때 $h(-1)=0$이므로 $f(-1)=7$이다.

$$\frac{h(x)}{2-2x^4}=\frac{h(x)-h(-1)}{2(1-x)(1+x)(1+x^2)}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)}{2-2x^4}&=\lim_{x\to-1-}\frac{h(x)-h(-1)}{2(1-x)(1+x)(1+x^2)}\\&=\frac{1}{8}h'(-1)\\&=\frac{1}{8}\{-2f(-1)+f'(-1)\}\\&=f(-1)\end{aligned}$$

이다.

$\frac{1}{8}f'(-1)=\frac{5}{4}f(-1)$이므로, $f'(-1)=70$이다.

따라서 $f(x)=4x^2-78x+81$이므로 $f(0)=81$이다.

21. [정답] 24

$\cos(\angle\mathrm{CBD})=\cos(\angle\mathrm{CAD})$이므로

사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이다.

또한 $\cos(\angle\mathrm{CBD})=\sin(\angle\mathrm{BDC})$이므로 $\angle\mathrm{CBD}+\angle\mathrm{BDC}=\frac{\pi}{2}$이며,

$\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$이다. 사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{2}$이다. (나)에 의하여 삼각형 BCD의 변의 비를 이용하여 $\angle\mathrm{DBC}=\frac{\pi}{3}$임을 알 수 있고, $\angle\mathrm{CAD}=\frac{\pi}{3}$이므로

$\triangle\mathrm{CAD}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}^2+36-48}{2\times6\times\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{\mathrm{AD}}=3+\sqrt{21}$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin(\angle\mathrm{ACD})=\frac{3+\sqrt{21}}{8}$$

이다. 따라서 $3+21=24$이다.

22. [정답] 153

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_2^x\{f(t)-x\}\,dt=\int_2^x f(t)\,dt-x(x-2)\\&=\int_2^x f(t)\,dt-x^2+2x\end{aligned}$$

이므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

또한 $g(2)=0$이고 $g'(x)=f(x)-2x+2$이다.

$g'(2)=f(2)-4+2=0$이므로

$g(x)=(x-2)^2(x-p)^2\ \ (p\neq2)$ 또는

$g(x)=(x-2)^3(x-p)\ \ (p=2)$이다.

조건 (나)를 만족시키기 위해서는 후자이어야 한다.

또한 $g'(3)=f(3)-4=12$이다.

$g'(x)=3(x-2)^2(x-p)+(x-2)^3$이고 이 식에 $x=3$을 대입하면

$$g'(3)=3(3-p)+1=12 \Rightarrow p=-\frac{2}{3}\text{이다.}$$

$g(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-2)^3$이므로 $g(5)=153$이다.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

Season 2

짝수형

선택과목 (확률과 통계) 해설

23. [정답] ③

$$_3\mathrm{H}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10,\quad {}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

이다.

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_3 + {}_4\Pi_3 = 74$

24. [정답] ②

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

25. [정답] ①

이 조사에서 사용된 표본평균을 $\overline{x}$라 하면, 신뢰구간은

$$12.72 = \overline{x} - 1.96 \times \frac{0.5}{7} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{0.5}{7} = a$$

이다. $12.72 = \overline{x} - 0.14$이므로

$$\overline{x} = 12.86,\quad a = \overline{x} + 0.14 = 13$$

이다.

$\therefore\ a = 13$

26. [정답] ④

5자리 수를 만들어야 하므로 6개 수 중 1개를 제외해야 한다. 우선 5의 배수가 되려면 일의자리가 0 또는 5여야 한다.

$0+1+3+3+5+7=19$이므로 3의 배수가 아니기 위해서는 1과 7은 5자리 수에 포함이 되어야 한다.

(ⅰ) 0이 제외된 경우

5를 일의자리에 두고 1, 3, 3, 7을 일렬로 나열하는 경우이므로

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(ⅱ) 5가 제외된 경우

0를 일의자리에 두고 1, 3, 3, 7을 일렬로 나열하는 경우이므로

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(ⅲ) 3 하나가 제외되고 일의 자리가 0인 경우

1, 3, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우이므로

$$4! = 24$$

(ⅳ) 3 하나가 제외되고 일의 자리가 5인 경우

0, 1, 3, 7을 일렬로 나열하는데 0이 첫 번째 자리가 아닌 경우이므로

$$4! - 3! = 18$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $12+12+24+18=66$이다.

27. [정답] ⑤

주어진 식은 이산확률분포 X의 제곱의 평균과 같으므로,

$$\sum_{k=1}^{9}\left(k^2 \times \mathrm{P}(X=k)\right) = \mathrm{E}(X^2) = \{\mathrm{E}(X)\}^2 + \mathrm{V}(X) = 3^2 + 2 = 11 \text{ 이다.}$$

[참고]

X는 0(1이 아님)부터 9까지의 값을 가지나, 이산확률변수의 (제곱의) 평균을 구하는 경우에는 0을 무시할 수 있다.

이산확률분포에서 제곱의 평균은

$\sum$(확률변수가 가지는 값의 제곱)×(그때의 확률)

인데, 확률변수가 가지는 값이 0이면 그때의 확률이 얼마든 무관히 0을 더하는 것이 되기 때문이다.

자료의 평균을 구하는 경우와 다름에 유의해야 한다.

28. [정답] ④

점수의 합이 7이 되도록 하는 경우는

(ⅰ) 3점+4점을 얻은 경우

(ⅱ) 4점+3점을 얻은 경우

(ⅲ) 2점+5점을 얻은 경우

(ⅳ) 5점+2점을 얻은 경우

뿐이다.

(ⅰ)인 경우,

첫 번째 시행에서 흰색 1번 공 + 흰색 2번 공을 뽑거나

첫 번째 시행에서 흰색 1번 공 + 검은색 3번 공을 뽑는 경우

이므로 그러할 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} = \dfrac{4}{15}$이고,

두 번째 시행에서 흰색 1번 공 + 흰색 3번 공을 뽑거나,

두 번째 시행에서 흰색 1번 공 + 검은색 4번 공을 뽑는 경우

이므로 그러할 확률 역시 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1 + {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} = \dfrac{4}{15}$이다.

따라서 (i)에 따라 점수의 합이 7이 될 확률은 $\dfrac{4}{15} \times \dfrac{4}{15}$이다.

(ⅱ)에 따라 점수의 합이 7이 될 확률 역시 그와 같다.

(ⅲ)인 경우,

첫 번째 시행에서 흰색 1번 공 + 흰색 1번 공을 뽑아야 하므로

그러할 확률은 $\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1 \times {}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2} = \dfrac{1}{15}$이고,

두 번째 시행에서 흰색 2번 공 + 흰색 3번 공을 뽑아야 하므로

그러할 확률 역시 $\frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$이다.

따라서 (iii)에 따라 점수의 합이 7이 될 확률은 $\frac{1}{15} \times \frac{1}{15}$이다.

(iv)에 따라 점수의 합이 7이 될 확률 역시 그와 같다.

따라서 구하고자 하는 조건부확률은

$$\frac{\frac{4}{15} \times \frac{4}{15}}{\frac{4}{15} \times \frac{4}{15} \times 2 + \frac{1}{15} \times \frac{1}{15} \times 2} = \frac{4 \times 4}{4 \times 4 \times 2 + 1 \times 1 \times 2} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

이다.

[다른 풀이]

꺼낸 두 공이 모두 흰색일 확률은 $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$,

꺼낸 두 공이 모두 검은색일 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$,

꺼낸 두 공의 색이 다를 확률은 $\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15}$

이다.

꺼낸 공이 모두 흰색인 경우 나올 수 있는 점수는 2, 3, 4, 5이며,

각각의 확률은 $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{15}$이다.

꺼낸 공이 모두 검은색인 경우 나올 수 있는 점수는 7이며, 이때의 확률은 $\frac{1}{15}$이다.

꺼낸 공의 색이 다른 경우 나올 수 있는 점수는 3, 4, 6, 8, 9, 12 이며, 각각의 확률은 $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{15}$이다.

그러므로 이 시행을 한 번 실시하여 얻을 수 있는 점수와 그때의 확률을 표로 나타내면 아래와 같다.

점수	2	3	4	5	6	7	8	9	12	계
확률	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

이 시행을 2번 반복하여 얻은 점수의 합이 7일 확률은

$2 \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{4}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{34}{15^2}$이고, 얻은 점수의 합이 7이면서

첫 번째 시행에서 얻은 점수가 3일 확률은 $\frac{4}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{15^2}$이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{16}{34} = \frac{8}{17}$이다.

29. [정답] 126

(나)를 무시하고 (가)만을 고려하면, ${}_3H_{19} = {}_{21}C_2 = 210$개의 순서쌍이 나온다. 이 중 (나)를 불만족시키는 순서쌍, 즉 3의 배수가 전혀 없는 순서쌍의 개수를 빼어 주어야 한다.
세 수의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이므로, 세 수를 3으로 나눈 나머지는 1, 1, 2가 되어야 한다. 3으로 나눈 나머지가 2인 미지수가 무엇인지에 따라 경우를 나누자.

(i) x_1을 3으로 나눈 나머지가 2인 경우
$x_1 = 3y_1 + 2$, $x_2 = 3y_2 + 1$, $x_3 = 3y_3 + 1$ (y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수) 라 놓을 수 있다. $y_1 + y_2 + y_3 = 6$이므로 이 경우의 수는 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$이다.

(ii) x_2를 3으로 나눈 나머지가 2인 경우
$x_1 = 3y_1 + 1$, $x_2 = 3y_2 + 2$, $x_3 = 3y_3 + 1$ (y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수) 라 놓을 수 있다. 이 경우의 수는 위와 같은 방식으로 28이다.

(iii) x_3을 3으로 나눈 나머지가 2인 경우
$x_1 = 3y_1 + 1$, $x_2 = 3y_2 + 1$, $x_3 = 3y_3 + 2$ (y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수) 라 놓을 수 있다. 이 경우의 수는 위와 같은 방식으로 28이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $210 - 28 \times 3 = 126$이다.

[다른 풀이]
3의 배수는 1개 혹은 2개 있을 수 있다. 이를 기준으로 경우를 나누자.

(i) 3의 배수의 개수가 1인 경우
나머지 두 수를 3으로 나눈 나머지는 모두 2이어야 한다.
$x_1 = 3y_1 + 3$, $x_2 = 3y_2 + 2$, $x_3 = 3y_3 + 2$ (y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수) 라 놓을 수 있다. (마지막에 3을 곱할 것이다.)
$y_1 + y_2 + y_3 = 5$, ${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$이고, 3을 곱하면 63이다.

(ii) 3의 배수의 개수가 2인 경우
나머지 수를 3으로 나눈 나머지는 1이어야 한다.
$x_1 = 3y_1 + 3$, $x_2 = 3y_2 + 3$, $x_3 = 3y_3 + 1$ (y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수) 라 놓을 수 있다. (마지막에 3을 곱할 것이다.)
$y_1 + y_2 + y_3 = 5$, ${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$이고, 3을 곱하면 63이다.

$63 + 63 = 126$이다.

30. [정답] 43

$y=f(x)$와 x축이 이루는 도형의 넓이는 $\frac{1}{k}$이므로

$$\frac{b}{12}=\frac{1}{k} \Rightarrow k=\frac{12}{b}$$

이다.

$0 \le x \le b$에서 $g(x)=f(x)+\frac{2}{3k}x$이므로

($y=f(x)$와 x축이 이루는 도형의 넓이)

+ ($y=\frac{2}{3k}x$와 x축, $x=b$가 이루는 도형의 넓이) $=1$

이다. 따라서

$$\frac{1}{k}+\frac{2b}{3k}\times b\times\frac{1}{2}=\frac{1}{k}+\frac{b^2}{3k}=\frac{b}{12}+\frac{b^3}{36}=1$$

이고,

$$b^3+3b-36=0 \Rightarrow (b-3)(b^2+3b+12)=0$$

이므로 양수인 b에 대하여 $b=3$이며, $k=4$이다.

또한, $0 \le x \le a$에서 $g(x)=\left(\frac{1}{6a}+\frac{1}{6}\right)x$가 x축에 평행하지 않은 직선이므로 따라서 $y=g(x)$와 직선 $x=a$, x축이 이루는 도형이 삼각형임을 알 수 있다.

이를 이용하면 $\mathrm{P}\left(Y \le \frac{2a}{3}\right)=\frac{2}{9}$이고, 이는 닮음비를 이용해 직선 $x=a$와 $y=g(x)$, x축이 이루는 삼각형의 넓이의 $\frac{4}{9}$임을 알 수 있다. 따라서 $\mathrm{P}(0 \le Y \le a)=\frac{2}{9}\times\frac{9}{4}=\frac{1}{2}$이다.

이때 $\mathrm{P}(a \le Y \le 3)=\frac{1}{2}$이고,

$$g(a)=\frac{1}{6}+\frac{a}{6},\quad g(b)=g(3)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(a+1)\right\}\times(3-a)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3-a}{2}+\frac{(a+1)(3-a)}{6}=1$$

$$\Rightarrow 9-3a+(-a^2+2a+3)-6=0$$

$$\Rightarrow a^2+a-6=0 \Rightarrow a=2 \ (\because\ a>0)$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}x & (0 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}x & (2 \le x \le 3) \end{cases}$이고,

$\mathrm{P}\left(1 \le X \le \frac{8}{3}\right)$는 직선 $x=1$, $x=\frac{8}{3}$와 $y=4f(x)$, x축이 이루는 도형의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(1 \le X \le \frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{8}{27}=\frac{43}{54}=p$$

$\therefore\ 54p=43$

수학 영역(미적분)

Season 2

선택과목 (미적분) 해설

23. [정답] ③

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$
$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{13}{6}$$

24. [정답] ②

$\frac{d^2x}{dt^2}=2,\ \frac{d^2y}{dt^2}=4e^{-2t}$ 이므로 점 P 의 시각 t 에서의 가속도의 크기는 $\sqrt{4+16e^{-4t}}$ 이다.

따라서 $t=\ln 2$ 에서 점 P 의 가속도의 크기는

$$\sqrt{4+16e^{-4\ln 2}}=\sqrt{4+16\times 2^{-4}}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

25. [정답] ⑤

$f(x)=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$ 라 하면 구하고자 하는 값은

$$\int_1^2\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이다. 이때, $f'(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}$ 이므로

$$\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2}}$$
$$=\left|\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right|$$

임을 알 수 있다. 이때 $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}>0$ 이므로

$$\left|\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 값은

$$\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{7}{12}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}$$

26. [정답] ④

$$y'=\frac{k}{x}+x^2-6x\ \ (x>0)$$
$$y''=-\frac{k}{x^2}+2x-6=\frac{1}{x^2}(2x^3-6x^2-k)\ \ (x>0)$$

이다.

$x>0$ 에서 y'' 의 부호가 바뀌지 않아야 하므로, 이 범위에서 $2x^3-6x^2-k$ 의 값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=2x^3-6x^2-k$ 라 하면

$f'(x)=6x^2-12x$ 이고, 이 식은 $x=2$ 에서만 실근을 가진다.

$$f(2)=16-24-k=-8-k\geq 0$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -8 이다.

27. [정답] ③

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\tan x\sec^2 x dx=\left[x\times\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx$$
$$=\frac{17}{36}\pi-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x-1)dx=\frac{17}{36}\pi-\frac{1}{2}\left[\tan x-x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{17}{36}\pi+\frac{1}{12}\pi-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{5}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

28. [정답] ②

$\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{AOD}=\theta$ 이므로 호 AD 의 원주각인 $\angle\mathrm{FBO}=\frac{\theta}{2}$ 이다.

이때, 사각형 OFDA 의 넓이는 삼각형 ABD 에서 삼각형 OBF 의 넓이를 뺀 값과 같다.

삼각형 ABD 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 2\sin\frac{\theta}{2}\times 2\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}$$

이고, 삼각형 OBF 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OF}}\sin\theta=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}\times\sin\theta$$

이다. 따라서

$$f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\sin\frac{3\theta}{2}}$$

이다. 또한, $\frac{1}{2}r(\theta)\left(\overline{\mathrm{OE}}+\overline{\mathrm{OB}}+\overline{\mathrm{BE}}\right)$ 는 삼각형 OBE 의 넓이와 같으므로 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{\mathrm{OE}}}{\sin(\angle\mathrm{OBE})}=\frac{1}{\sin(\angle\mathrm{OEB})}$$

이다. 직선 AD와 BE가 평행하므로 $\angle\mathrm{EBF}=\frac{\pi}{2}$ 이며,

$$\angle\mathrm{OBE}=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2},\quad \angle\mathrm{OEB}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\theta}{2}$$

이다. 그러므로

$$\overline{\mathrm{OE}}=\frac{\sin(\angle\mathrm{OBE})}{\sin(\angle\mathrm{OEB})}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{3\theta}{2}}$$

이다. 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}}$ 임을 알 수 있다.

삼각형 OBE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OE}}\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{3\theta}{2}}\times\sin\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\cos\frac{3\theta}{2}}$$

이므로 다음 등식이 성립한다.

$$r(\theta)=\frac{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{3\theta}{2}}+1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\frac{3\theta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\sin\theta}$$

이때,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\theta\sin\frac{3\theta}{2}}\right\}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

이고,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\sin\theta}\right\}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{r(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$$

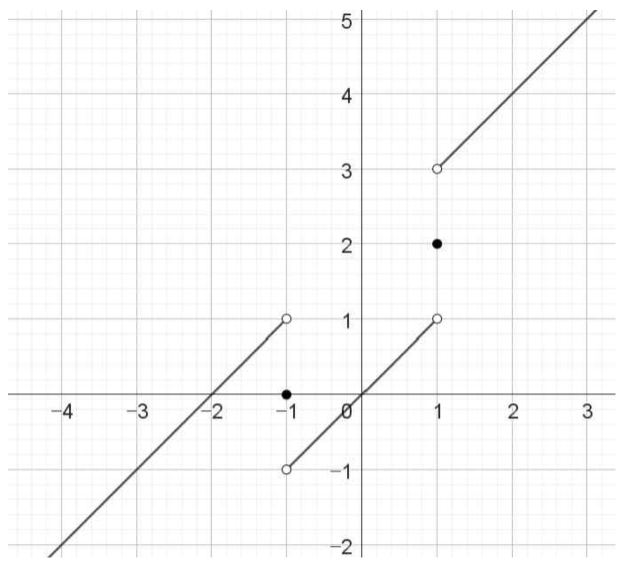
이다.

29. [정답] 8

함수 $f(x)$를 간단히 하면 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (|x|<1)\\ x & (|x|>1)\\ 2 & (x=1)\\ 0 & (x=-1)\end{cases}$$

그러므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=t(x+1)^2$은 점 $(-1,\ 0)$에서 x축에 접하므로, 함수 $f(x)$의 그래프와 곡선 $y=t(x+1)^2$ (이하 "곡선")의 위치 관계를 알아보기 위해서는 다음 네 상황을 기준으로 경우를 나누어야 한다.

곡선이 $y=x$와 접할 때 → 판별식을 이용하면 $t=\frac{1}{4}$

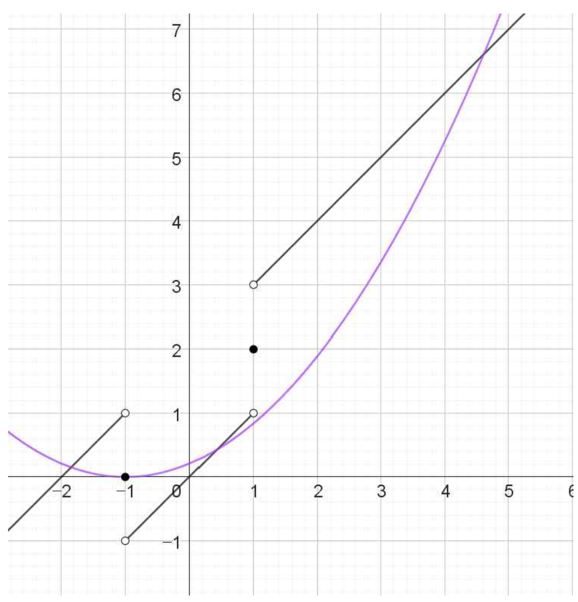
곡선이 점 $(1,\ 1)$을 지날 때 → $t=\frac{1}{4}$

곡선이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 → $t=\frac{1}{2}$

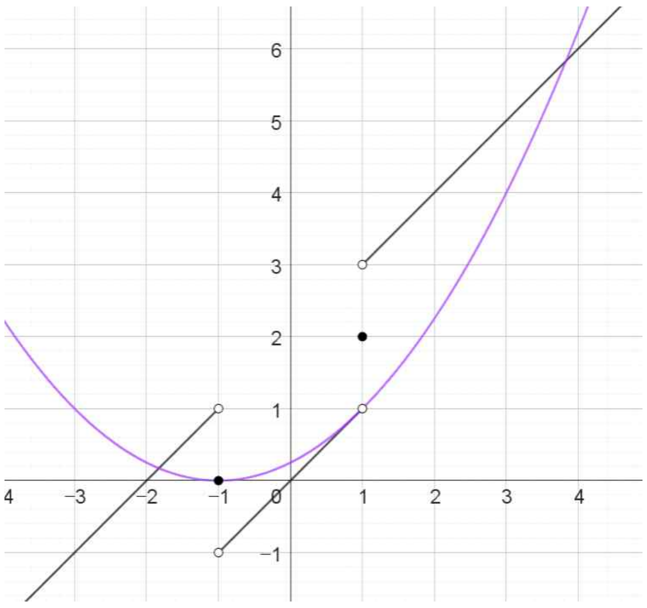
곡선이 점 $(1,\ 3)$을 지날 때 → $t=\frac{3}{4}$

첫째와 둘째 상황에서의 t 값이 같음을 확인할 수 있다. 그러므로 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$을 기준으로 t의 범위를 나누어 그래프를 그려 보면 된다.

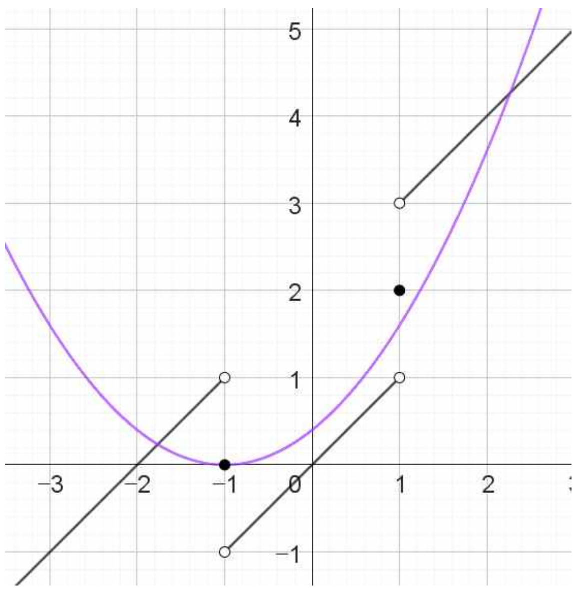
(ⅰ) $t<\frac{1}{4}$일 때, $g(t)=4$이다.



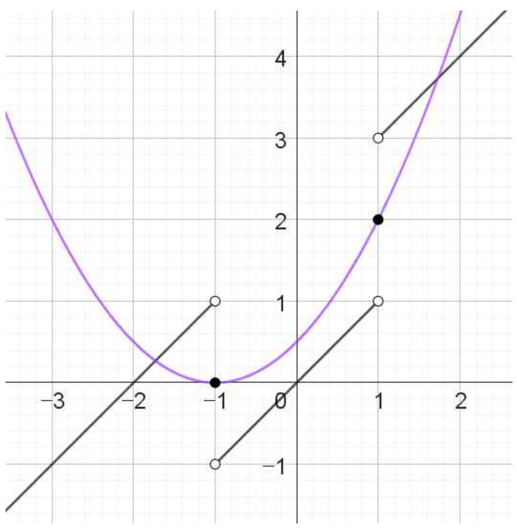
(ⅱ) $t=\frac{1}{4}$일 때, $g(t)=3$이다.



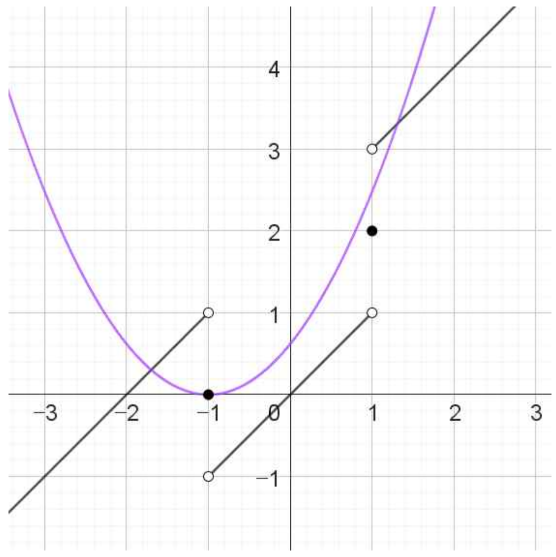
(ⅲ) $\frac{1}{4}<t<\frac{1}{2}$ 일 때, $g(t)=3$ 이다.



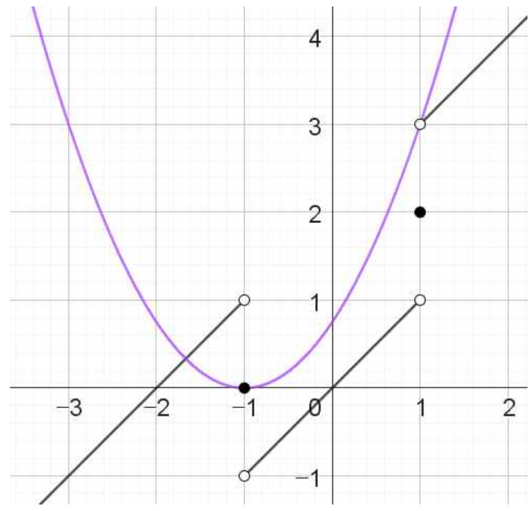
(ⅳ) $t=\frac{1}{2}$ 일 때, $g(t)=4$ 이다.



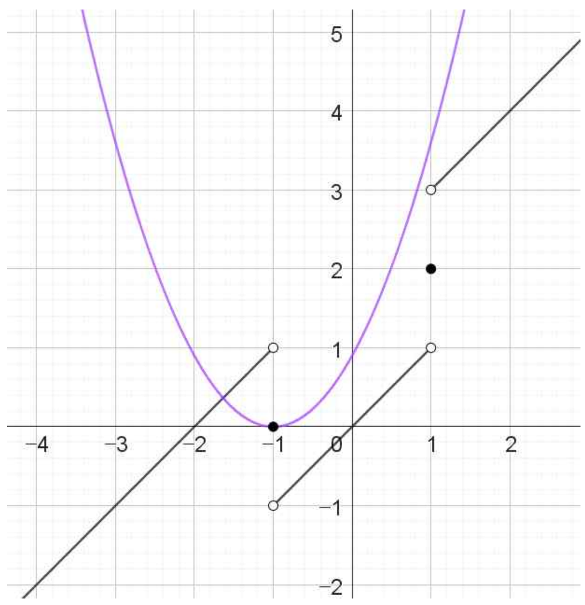
(ⅴ) $\frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}$ 일 때. $g(t)=3$ 이다.



(ⅵ) $t=\frac{3}{4}$ 일 때. $g(t)=2$ 이다.



(ⅶ) $t>\frac{3}{4}$ 일 때, $g(t)=2$ 이다.



이를 요약하면 아래와 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 4 & \left(0<t<\frac{1}{4}\right) \\ 3 & \left(\frac{1}{4}\le t<\frac{1}{2}\right) \\ 4 & \left(t=\frac{1}{2}\right) \\ 3 & \left(\frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(t\ge\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(g\left(\frac{1}{n}\right)-p\right)$$
$$=(g(1)-p)+\left(g\left(\frac{1}{2}\right)-p\right)+\left(g\left(\frac{1}{3}\right)-p\right)+\left(g\left(\frac{1}{4}\right)-p\right)+\left(g\left(\frac{1}{5}\right)-p\right)+\cdots$$

이고, $g\left(\frac{1}{5}\right)=g\left(\frac{1}{6}\right)=\cdots=4$ 이므로 $p=4$이어야 한다.

(급수가 수렴하기 위해서는 일반항이 0 으로 수렴해야 하기 때문)

그러므로 주어진 급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(g\left(\frac{1}{n}\right)-p\right)=\sum_{n=1}^{4}\left(g\left(\frac{1}{n}\right)-4\right)$$
$$=(g(1)-4)+\left(g\left(\frac{1}{2}\right)-4\right)+\left(g\left(\frac{1}{3}\right)-4\right)+\left(g\left(\frac{1}{4}\right)-4\right)$$
$$=(2-4)+(4-4)+(3-4)+(3-4)$$
$$=-4$$
$$=q$$

이다.

따라서 $p=4$, $q=-4$ 이므로 $p-q=8$ 이다.

30. [정답] 9

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$ 라 하면 조건 (가)의 식은 $F(x)-F(0)=G(f(x))-G(x)$ 이고, 양변을 x 에 대해 미분하면 $f(x)=f'(x)g(f(x))-g(x)$ 이다.

이때 $g(f(x))=x$ 이므로 $f(x)=xf'(x)-g(x)$ 이다.

$x>0$ 일 때 $g(x)=xf'(x)-f(x)$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{g(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

이므로

$$\int_1^2\frac{g(x)}{x^2}dx=\left[\frac{f(x)}{x}\right]_1^2=\frac{f(2)}{2}-f(1)$$

이다. 조건 (가)의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $\int_0^{f(0)}g(t)dt=0$ 임을 알 수 있다. 이때 함수 $f(x)$ 가 증가함수이므로 $f(0)\neq 0$ 이면 $\int_0^{f(0)}g(t)dt<0$ 이다. 따라서 $f(0)=0$ 이다.

$x>0$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 이고, 조건 (나)에 의해 함수 $f(x)$ 가 상수함수가 아니므로 $x\ge 1$ 일 때 $\int_0^x f(t)dt>0$ 이다.

$x>0$ 일 때 $f(x)\ge 0$ 이므로 $g(x)\ge 0$ 이다. 조건 (가)에서 $x\ge 1$ 이면 좌변의 정적분 값이 양수이므로 우변의 정적분 값도 양수이다. $x\ge 1$ 일 때 $g(x)>0$ 이므로 적분구간이 위끝이 아래끝보다 커야한다. 따라서 $x\ge 1$ 일 때 $f(x)>x$ 이므로 $f(1)=2$, $f(2)=3$ 이다.

$$\therefore\ k=\int_1^2\frac{g(x)}{x^2}dx=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 36k^2=9$$

제 2 교시

수학 영역(기하)

Season 2

짝수형

선택과목 (기하) 해설

23. [정답] ④

점 A에서 z축에 내린 수선의 발 B의 좌표는 $(0, 0, 2)$이므로 선분 AB의 길이는 $\sqrt{3^2+a^2}$이다. 따라서 $a^2+9=25$이므로 $a=4$이다.

24. [정답] ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$이다.
이와 같은 점근선을 가지는 쌍곡선 C는 양수 k에 대하여
$\frac{x^2}{2k}-\frac{y^2}{3k}=\pm1$이라 할 수 있다.
이 쌍곡선이 점 $(2, 6)$을 지나므로

$$\frac{4}{2k}-\frac{36}{3k}=-\frac{10}{k}=\pm1 \Rightarrow k=10$$

이다.

따라서 쌍곡선 C: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{30}=-1$의 주축의 길이는 $2\sqrt{30}$이다.

25. [정답] ②

$\overline{\mathrm{PQ}}=6$이고 두 평면 α, β가 이루는 이면각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로, $\overline{\mathrm{PR}}=3\sqrt{3}$이다. $\overline{\mathrm{AR}}=5$이고 두 직선 AR와 PR는 수직이므로, $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AR}}^2+\overline{\mathrm{PR}}^2}=2\sqrt{13}$이다.

26. [정답] ③

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\vec{u}=(1, 2)$, $\vec{v}=(-1, 3)$이라 하자. 두 벡터 $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=5=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이다. 즉 두 직선 l_1과 l_2가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이다.

따라서 두 직선 l_2와 l_3가 이루는 예각의 크기도 $\frac{\pi}{4}$이다.

이때 두 직선 l_1과 l_3가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$임을 알 수 있다.

두 직선 l_1과 l_2는 점 $(1, -1)$에서 만난다. 직선 l_3는 직선 l_1과 수직이고 점 $(1, -1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}$$

이다. 따라서 직선 l_3의 y절편은 $-\frac{1}{2}$이다.

27. [정답] ②

포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 $\mathrm{A}(4, 4)$에서 그은 접선의 방정식은

$$4y=2(x+4) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

이다. 접선이 x축과 만나서 생기는 교점을 $\mathrm{C}(-4, 0)$이라 할 때, 삼각형 FAC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times5\times4=10$$

이다. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=5:3$이므로 삼각형 FAB의 넓이는

$$10\times\frac{5}{8}=\frac{25}{4}$$

이다.

28. [정답] ④

$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-1)(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-4)=0$에서 점 X는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, 4인 원을 나타내고 있음을 알 수 있다.

(ⅰ) 두 점 P, Q가 각각 반지름의 길이가 4, 1인 원 위에 있는 경우
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$가 이루는 각의 크기를 θ_1, $4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 종점을 P′이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=16$, $\overline{\mathrm{AQ}}=1$, $\overline{\mathrm{P'Q}}=8\cos\theta_1$에서 $8\cos\theta_1\le8$이다. $16>1+8$이므로 삼각형이 성립하지 않는다.

(ⅱ) 두 점 P, Q가 각각 반지름의 길이가 1, 4인 원 위에 있는 경우
주어진 식의 양변을 제곱하면

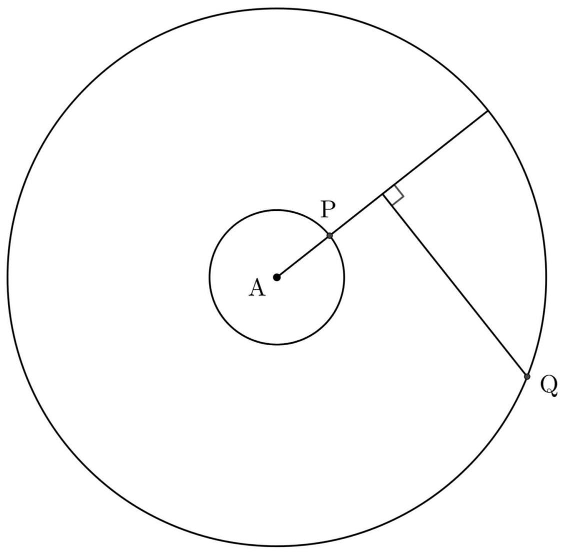
$$4(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2=16|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2-8\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

이고 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=4$이므로 식을 정리하면

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}})^2+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-8=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2 \text{ 또는 } \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-4$$

그러나 주어진 식에서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}>0$임을 알 수 있으므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2$이다.

이상에서 두 점 P, Q의 위치는 다음과 같다.



삼각형 APQ에서 두 선분 PA, PQ가 만나서 생기는 각의 크기를 θ_2라 하자. 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta_2 = \frac{1+13-16}{2\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

이다. 또한 선분 PQ의 중점 M에 대하여 삼각형 APM에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = 1 + \frac{13}{4} + 1 = \frac{21}{4}$$

이다. 점 M은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{21}}{2}$인 원을 나타낸다. 따라서 점 M이 그리는 도형의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2 = \frac{21}{4}$ 이다.

이 원이 원점을 지나므로 $a^2+b^2=\frac{21}{4}$ 이다.

29. [정답] 28

타원의 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$라 하면 타원의 장축 위의 꼭짓점에서 초점까지의 거리가 될 수 있는 수는

$$a,\ a-\sqrt{a^2-b^2},\ a+\sqrt{a^2-b^2}$$

이다. $2k=a=2\sqrt{a^2-b^2}$ 에서 $b=\sqrt{3}k$이므로 삼각형 AFF′은 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=l$이라 하면 $\overline{\mathrm{PF'}}=4k-l$이다.

$\angle\mathrm{PFF'} = \frac{2}{3}\pi$이므로 삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의해

$$16k^2-8kl+l^2 = l^2+4k^2+2kl \Rightarrow l = \frac{6}{5}k$$

이다. 삼각형 AF′P는 밑변이 $\frac{16}{5}k$, 높이가 $\sqrt{3}k$이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}k\times\sqrt{3}k = \frac{8\sqrt{3}}{5}k^2 = 40 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{3}\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $p=3$, $q=25$이므로 $p+q=28$이다.

30. [정답] 32

두 구의 반지름의 길이가 같으므로

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OO'}} = \sqrt{2a^2+1} = 3 \Rightarrow a=2$$

이다.

두 구의 반지름의 길이가 같으므로 직선 PQ는 직선 OO′과 평행하고, 직선 PQ와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면, θ는 직선 OO′과 xy평면이 이루는 예각의 크기와 같다.

점 O′에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 H$(2, 2, 0)$이고,

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OO'}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이다. 점 P에서 평면 OQP에 내린 수선의 발은 점 P에서 직선 RO에 내린 수선의 발과 일치하며, 그 점을 P′이라 하자.

삼각형 OPR는 $\angle\mathrm{OPR} = \frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{PRO} = \theta$, $\overline{\mathrm{OP}}=1$인 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PR}} = 2\sqrt{2}$ 이며, $\overline{\mathrm{QR}} = 3+2\sqrt{2}$ 이다.

그러므로 선분 QR의 xy평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{\mathrm{QR}}\times\cos\theta = (3+2\sqrt{2})\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3}+2\sqrt{2}$$

이다.

$\therefore\ p=\frac{8}{3},\ q=2 \Rightarrow 6pq=32$