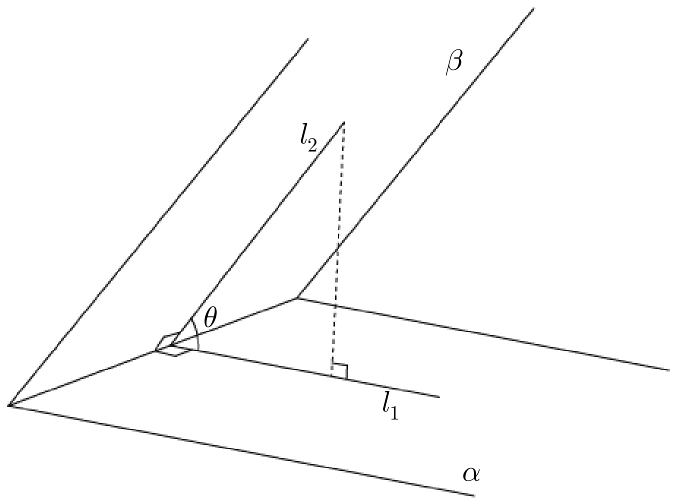
안녕하세요. 디엔티 수학연구소 대표 조민성입니다. 저희 디엔티에서 수험생 여러분들의 수학 실력 향상에 조금이나마 도움을 주고 싶다는 마음에 4~5가지 테마를 바탕으로 칼럼을 기재할 예정입니다. 한 가지 테마에 대해 기출문제를 통해 몇가지 분석을 하고 이를 바탕으로 새로 만들어진 문항들의 풀이를 이어나가려고 합니다. 많은 관심 부탁드리겠습니다.

Thema (2). 이면각

일반적으로 29번 문항에 공간도형 또는 벡터 문제가 출제될 가능성이 매우 높습니다. 특히 이면각과 공간도형의 최대최소 문제가 출제될 가능성이 매우 높다고 생각되는데요 오늘은 그 중 이면각에 대한 이야기를 해보고자 합니다.

이면각이란 두 평면이 이루는 각의 크기를 의미합니다. 그림으로 볼까요?

다음 그림의 두 평면 α, β를 봅시다.

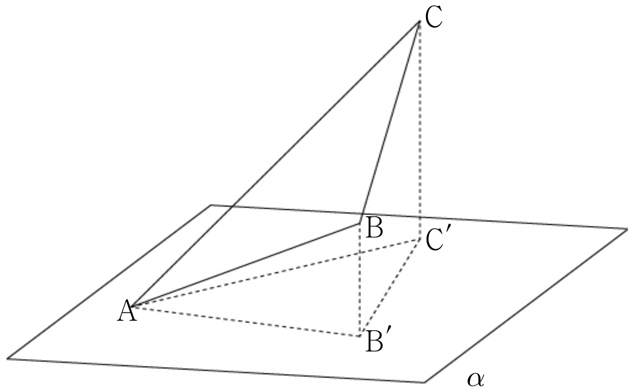


두 평면이 평행 또는 일치하지 않으면, 두 평면은 항상 만나며 두 평면의 교점들의 자취를 교선이라고 합니다. 이 때, 교선에 수직이고 각각의 평면에 포함된 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각을 이면각 θ라고 합니다. 이 때, 직선 l_2위의 한 점에서 직선 l_1로 정사영을 내리면 그림과 같이 삼수선을 볼 수 있습니다.

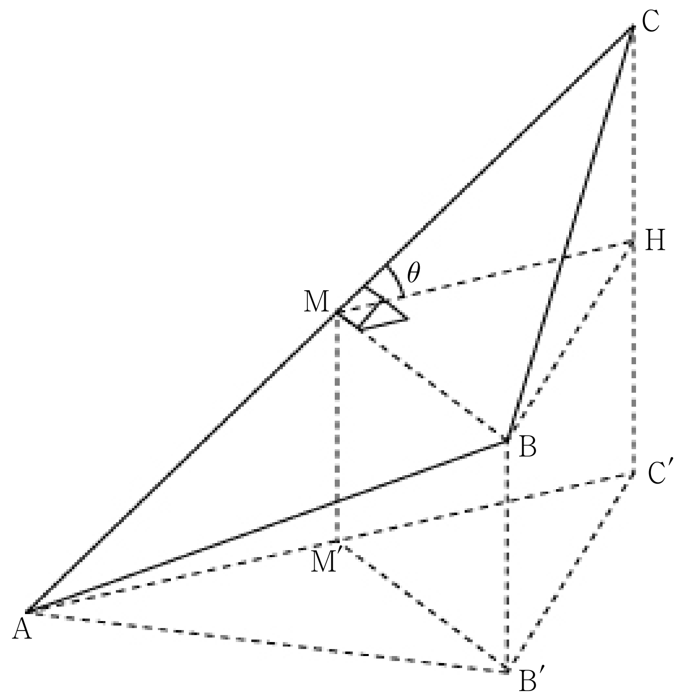
즉, 이면각의 크기를 구하기 위해서는 그림과 같이 이면각에 해당하는 삼수선을 찾아낼 수 있어야 합니다.

다음의 문제는 평가원에서 특히 자주 나오는 상황입니다.

Q. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 평면 α위로의 정사영을 B'이라 하고, 점 C의 평면 α위로의 정사영을 C'이라 하자. $2\overline{BB'}=\overline{CC'}$이고 삼각형$AB'C'$이 정삼각형 일 때, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 구하시오.



Sol.

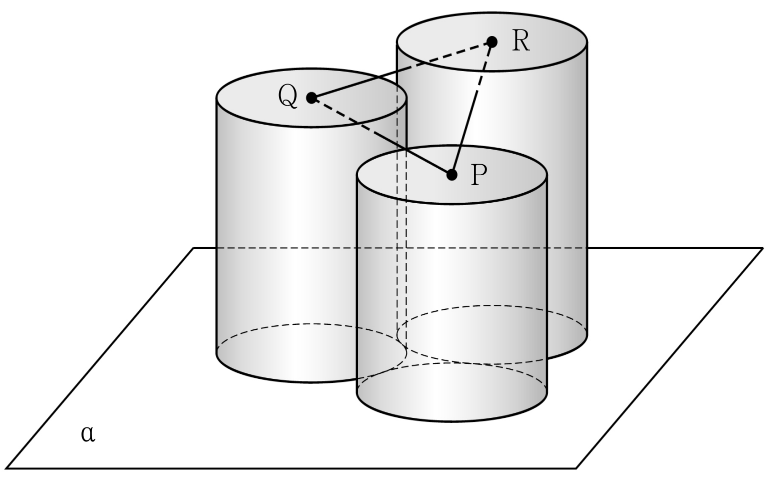


(1) $\overline{BB'}=a$, $\overline{CC'}=2a$라 하자. 그리고 선분 AC의 중점을 M이라 하면, 선분 BM은 삼각형 ABC를 수직 이등분한다.
(2) 선분 BM과 선분 B′M′은 평행하고 길이또한 같다. (∵선분 B′M′은 정삼각형 AB′C′의 수직 이등분선)
(3) 선분 CC′의 중점을 H라 하면, 평면 α와 평면 MBH는 평행하다.

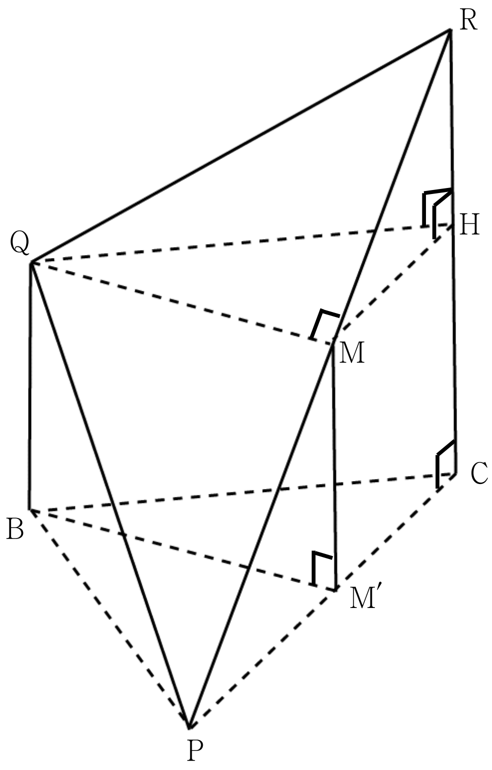
그러므로 위의 그림과 같이 삼수선을 볼 수 있고, 이면각 $\theta=\angle CMH=\angle CAC'$임을 확인할 수 있습니다.

수능에서 이 아이디어가 출제된 문항을 살펴보겠습니다. -> 2009학년도 수능 24번 문항

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$)



이 문제를 삼각형 QPR을 평면 α에 정사영을 내린 넓이를 통해 해결하는 학생들이 생각보다 많습니다. 하지만 이면각을 이용하면 훨씬 간단하게 해결할 수 있습니다.



풀이) 그림과 같이 세 점 P, Q, R을 평면 α
위로 정사영한 점을 P, B, C라 하자. (점 P는 그대로 이다.)

1) $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$ 이다.

2) $\overline{\mathrm{QM}}=\overline{\mathrm{BM'}}$, $\overline{\mathrm{QM}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BM'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{M'C}}=\overline{\mathrm{MH}}$, $\overline{\mathrm{M'C}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{MH}}$이다. 그리고 $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{MM'}}$이다.
(점 M은 선분 PR의 중점, 점 M′은 선분PC의 중점, 점 H는 점 R의 평면 QMH위로의 정사영)

3) 평면 PBC와 세 직선 QB, MM′, RC는 수직이다.

4) $\overline{\mathrm{MM'}}=x$, $\overline{\mathrm{RC}}=y$하면 $2\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PR}}$이므로 $2a=b$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{QH}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MH}}=\sqrt{3}$이므로 삼각형 PQR은 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 이등변 삼각형이다.

5) 삼수선의 정리를 이용하여 평면 PQR과 평면 α가 이루는 각의 크기 $\theta=\angle\mathrm{PMH}=60^{\circ}$이다.

$\therefore\ a=8+\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{3}=11,\ b=8+2\sqrt{3}\tan\dfrac{\pi}{3}=14$

여기까지 이면각에 대해 공부해 보았습니다. 공간도형 고난도 킬러 문항으로 출제될 가능성이 매우 높다고 판단하여 이렇게 다뤄보았습니다. 개인적으로 이면각과 삼수선을 적절하게 활용할 수 있다면 공간도형의 실력을 한단계 높일 수 있다고 생각합니다. 특히 이면각이 언급되었을 때 조건반사적으로 정사영의 넓이를 활용하려고 하는 학생들이 생각보다 많습니다. 물론 때로는 정사영을 적절하게 활용해야하는 문제도 있겠지만 이 칼럼을 공부하는 학생들은 내가 이면각의 정의를 정확하게 알고 삼수선을 적절히 활용할 수 있는지 다시 한 번 점검해 보기를 바랍니다.

다음은 위의 아이디어가 조금 변형되어 출제된 문항입니다. 한 번 연습해 보기를 바랍니다. - 2012학년도 9월 평가원

Q. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.