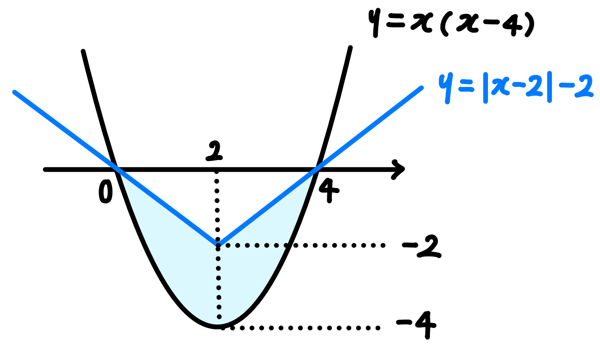
제 2 교시

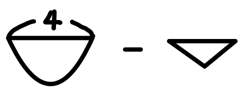
수학 영역

5지선다형

8. 두 그래프 $y=x(x-4)$, $y=|x-2|-2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$



(둘러싸인 부분의 넓이) = 

$= \frac{1}{6}\times|1|\times4^3 - \frac{1}{2}\times4\times2$

$= \frac{20}{3}$

9. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3-t,\ v_2(t)=t$$

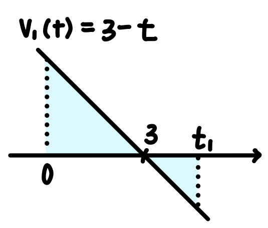
이다. 출발한 시각부터 점 P가 움직인 거리가 5가 되는 순간, 점 Q의 위치는? [4점]

Step1

Step2

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Step1



(점 P의 움직인 거리)

$= \frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times(t_1-3)^2=5$

$\therefore t_1=4$

Step2

(점 Q의 위치) = 처음위치 + 위치의 변화량

$= 0+\int_0^4 t\,dt$

$= 8$

10. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 방정식

$$x^2+a_1x-2a_2=0$$

의 서로 다른 두 실근은 a_3, a_4이다. a_6의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

Step1 근과 계수와의 관계

(두 근의 합) $= a_3+a_4=-a_1$ …㉠

(두 근의 곱) $= a_3\times a_4=-2a_2$ …㉡

Step2

$a_n=a+(n-1)d$ 라 하자.

㉠에 의해 $2a+5d=-a \Rightarrow a=-\frac{5}{3}d$

㉡에 의해 $(a+2d)(a+3d)=-2(a+d)$

이므로, 두 식을 연립하면

$\frac{1}{3}d\times\frac{4}{3}d=\frac{4}{3}d$ 이므로 0이 아닌 d의 값은 3이다.

$\therefore a=-5,\ d=3$

Step3

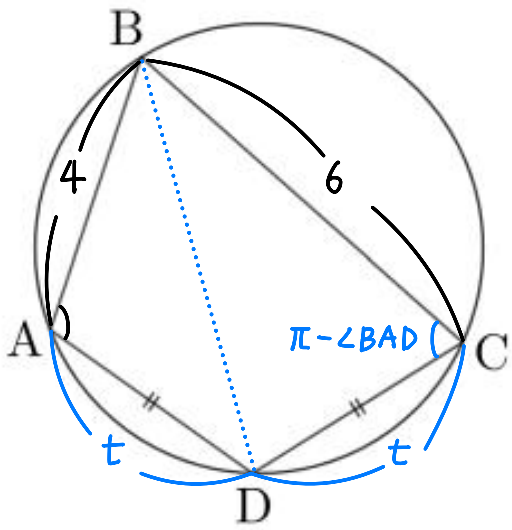
$a_6=a+5d=10$

11. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$이고 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킬 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

(가) $\cos(\angle BAD)=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

(나) $\overline{AD}=\overline{CD}$ $=t$

① $4\sqrt{11}$ ② $\frac{9}{2}\sqrt{11}$ ③ $5\sqrt{11}$ ④ $\frac{11}{2}\sqrt{11}$ ⑤ $6\sqrt{11}$



Step1 보조선 $\overline{BD}$ 긋기

$\overline{AD}=\overline{CD}=t$라 하자.

$\triangle ABD$에서 코사인법칙을 적용하면,

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos\angle BAD$

$=4^2+t^2-2\times4\times t\times(-\frac{\sqrt{3}}{6})$ 이고,

$\triangle CBD$에서 코사인법칙을 적용하면,

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\underline{\cos\angle BCD}$

$=\cos(\pi-\angle BAD)=-\cos\angle BAD$

($\because$ 원에 내접하는 사각형)

$=6^2+t^2-2\times6\times t\times\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

따라서

$\overline{BD}^2=t^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}t+16=t^2-2\sqrt{3}t+36$ 이므로 $t=2\sqrt{3}$이다.

Step2 사각형 ABCD의 넓이 구하기

$\sin\angle BAD=\sin\angle BCD=\frac{\sqrt{33}}{6}$ ($\because \cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{3}}{6}$)

$[\triangle ABD]=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6}=2\sqrt{11}$

$[\triangle BCD]=\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6}=3\sqrt{11}$

$\therefore [\square ABCD]=[\triangle ABD]+[\triangle BCD]=5\sqrt{11}$

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,1)$에서의 접선이 $y=f(x)$와 점 A에서 만난다. 점 A에서 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식이 $y=10x-16$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

Step1 삼차함수의 세 근의 합 이용하기

점 A의 x좌표를 a라 하자.

삼차함수의 근과 계수와의 관계를 생각할 때,

$f(x)=0$과 $f(x)-$접선의 방정식$=0$의 삼차항과 이차항의 계수가 동일하기 때문에 두 방정식의 세 근의 합은 동일하다.

$\therefore$ $f(x)=$($x=-1$에서의 접선의 방정식)의 세 근이 $-1,-1,a$이기 때문에 $f(x)=0$의 세 근의 합은 $(-1)+(-1)+a$이다.

Step2

$f(x)=10x-16$의 세 근의 합도 $a-2$이기 때문에

두 함수 $y=f(x)$와 $y=10x-16$은 $(a, f(a))$에서 접하고,

$(-a-2, f(-a-2))$에서 만난다. ($\because a+a+(-a-2)=a-2$)

그러므로 $f(x)-(10x-16)=(x-a)^2(x+a+2)$이고,

$f(-1)=1$이므로 위 식에 $x=-1$을 대입하면 $(a+1)^3=27$이다.

따라서 $a=2$이고, $f(x)=(x-2)^2(x+4)+10x-16$이므로 $f(3)=21$이다.

참고

p와 q의 값과 상관없이 $f(x)=px+q$의 세 근의 합은 동일하다.

(중근의 경우 여러번 포함하여 계산한다.)

13. $f'(0)=2$인 이차함수 $f(x)$와 0이 아닌 실수 k에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\sqrt{x+4}}{f(x)+f(-x)}=k$$

이다. k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

Step1

만약 $f(0)\neq 0$ 이라면, $K=0$일 것이다. ($K=\frac{2-2}{0\text{이 아닌 상수}}=0$)

주어진 조건에서 $K\neq 0$ 이므로 $f(0)=0$ 이다.

Step2

$f(x)=ax^2+2x$ 라 하자. (단, $a\neq 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\sqrt{x+4}}{f(x)+f(-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+2-\sqrt{x+4}}{2ax^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4a^2x^2+(8a-1)x}{2ax^2(2ax+2+\sqrt{x+4})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4a^2x+(8a-1)}{8ax}=K$$

이때 K의 값이 존재하려면 $a=\frac{1}{8}$ 이다.

$$\therefore K=\lim_{x\to 0}\frac{4a^2x+(8a-1)}{8ax}=\frac{a}{2}=\frac{1}{16}$$

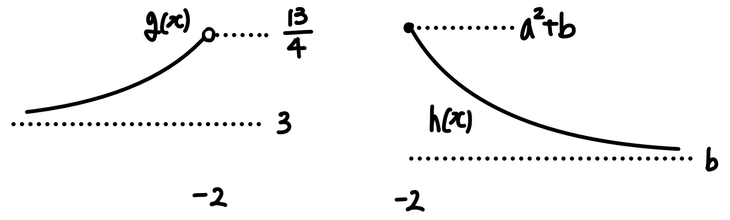
14. 두 상수 $a(a>1)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2^x+3 & (x<-2) : g(x)\ (x<-2\text{에서 정의됨})\\ a^{-x}+b & (x\geq -2) : h(x)\ (x\geq -2\text{에서 정의됨})\end{cases}$$

이라 하자. x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 t의 개수는 3이다. a^2+b^2의 값은? [4점]
└조건
↳'불연속적'에 주목

① 13 ② $\frac{55}{4}$ ③ $\frac{29}{2}$ ④ $\frac{61}{4}$ ⑤ 16

Step1 그래프 그리기



Step2 조건을 만족시키는 t의 불연속성에 초점맞춰 해석하기

만약 $g(x)$의 치역이 $h(x)$의 치역에 일부라도 포함되지 않는다면, 포함되지 않는 구간에서 조건을 만족시키는 t는 연속적으로 나온다.

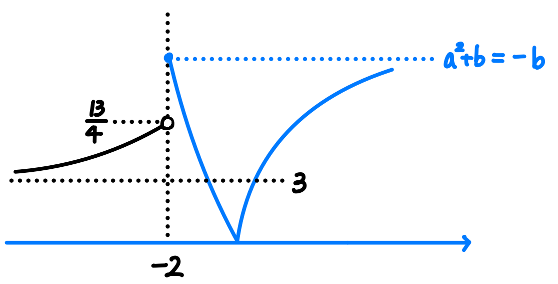
$\therefore (3,\frac{13}{4})\subset(b,a^2+b)\Rightarrow b\leq 3,\ a^2+b\geq\frac{13}{4}$

만약 $0\leq b\leq 3$ 이라면, 구간 $(b,3)$에서 조건을 만족시키는 t는 연속적으로 나온다. $\Rightarrow b<0$

Step3 케이스분류하며 가능한 상황 찾기

① $a^2+b>\frac{13}{4}$

구간 $(\frac{13}{4},a^2+b)$에서 조건을 만족시키는 t가 연속적으로 나오면 안 되므로 $-b\geq a^2+b$ 이고, $(a^2+b,-b)$에서도 마찬가지 논리를 적용하면 $-b=a^2+b$이다.

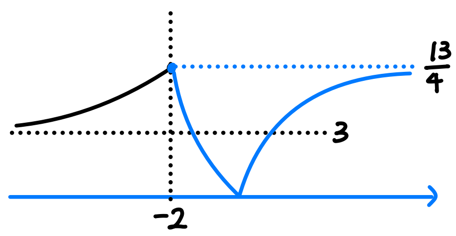


이때 조건을 만족시키는 t는 $t=0$, $t=a^2+b$의 2개이므로 구하는 상황이 아니다.

② $a^2+b=\frac{13}{4}$

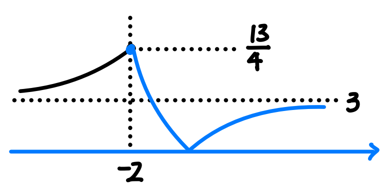
마찬가지로 조건을 만족시키는 t의 불연속성에 의해 $-b=\frac{13}{4}$ 또는 $-b=3$이다.

i) $-b=\frac{13}{4}$



조건을 만족시키는 t는 $t=0$, $t=\frac{13}{4}$ 의 2개이므로 구하는 상황이 아니다.

ii) $-b=3$



$t=0$, $t=3$, $t=\frac{13}{4}$ 에서 $|f(x)|=t$의 실근이 1개이다.

따라서 $a^2+b=\frac{13}{4}$, $b=-3$ 이므로 $a=\frac{5}{2}$이다.

그러므로 $a^2+b^2=\frac{61}{4}$ 이다.

15. 상수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=a\left(x-\int_0^3 f(t)dt\right)^2\left(x-\int_0^2 f(t)dt\right)$$

을 만족시킨다. 상수 a의 값은? [4점]

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^3 f(t)\cdot dt=0$ 이거나 $\int_0^2 f(t)\cdot dt=0$ 임을 알 수 있다.

만약 $\int_0^2 f(t)\cdot dt=0$ 이라면,

$xf(x)=a(x-\int_0^3 f(t)\cdot dt)^2\times x$ 이므로

$f(x)=a(x-\int_0^3 f(t)\cdot dt)^2$ 이고

이 경우 $\int_0^3 f(t)\cdot dt\neq 0$ 이다.

그림참고

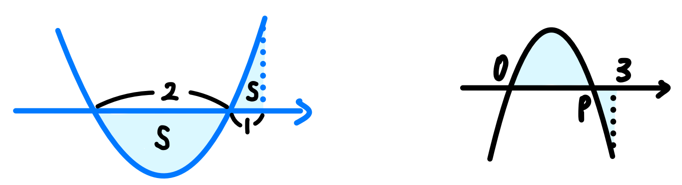
따라서 $\int_0^3 f(t)\cdot dt=0$ 이다.

$xf(x)=ax^2(x-\int_0^2 f(t)\cdot dt)$ 이므로

$f(x)=ax(x-\int_0^2 f(t)\cdot dt)$ 이다.

$\int_0^2 f(t)\cdot dt=p$ 라고 한다면,

$\int_0^3 ax(x-p)\cdot dx=a(9-\frac{9}{2}p)=0$ 이므로 $p=2$ 이다.



2 : 1 비율관계 적용가능

$\Rightarrow p=2$

$\int_0^2 ax(x-2)\cdot dx=-\frac{a}{6}\times 2^3=p=2$ 이므로 $a=-\frac{3}{2}$ 이다.

단답형

20. 첫째항이 음수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_1\times a_n & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

이고 $a_4+3a_1=0$이다. $|a_m|\leq 3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_{11}$의 값을 구하시오. [4점]

45

Step1 a_1 구하기

$a_1=a$라 하자. $(a<0)$

a_1이 음수이기 때문에 $a_2=a_1\times a_1=a^2$이고, $a_2>0$ 이다.

a_2가 양수이기 때문에 $a_3=a_2-2=a^2-2$ 이다.

만약 $a^2<2$라면 $a_3<0$ 이기 때문에 $a_4=a^3-2a$ 이다.

이때 $a_4+3a_1=a^3+a=0$ 이고, 주어진 방정식을 만족시키는 a값은 $a=0$으로 음수가 아니기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a^2\geq 2$ 이고, $a_3\geq 0$ 이기 때문에 $a_4=a^2-4$ 이다.

$a_4+3a_1=a^2+3a-4=0$ 이고, $a^2\geq 2$와 $a<0$을 만족시키는 $a=-4$이다.

Step2 나열하며 규칙성 찾기

$a_1=-4$ 이므로 $a_2=16$, $a_3=14$, $\cdots$, $a_{10}=0$ 이고

$a_{11}=-2$ 이므로 $a_{12}=8$, $a_{13}=6$, $a_{14}=4$, $a_{15}=2$, $a_{16}=0$ 이다.

즉, $n=11$ 부터 a_n의 값은 $(-2,8,6,4,2,0)$이 반복된다.

$\underbrace{90}_{a_{11}\sim a_{100}\text{ 항의 개수}}=\underbrace{6}_{\text{주기}}\times 15$ 이므로 $|a_m|\leq 3$을 만족시키는 m의 개수는 $2+3\times 15=47$이다.

따라서 $p=47$, $a_{11}=-2$ 이므로 $p+a_{11}=45$ 이다.

21. 자연수 k와 함수 $f(x)=\sin kx$가 있다. 실수 t에 대하여, 닫힌구간 $\left[t,\ t+\frac{\pi}{9}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

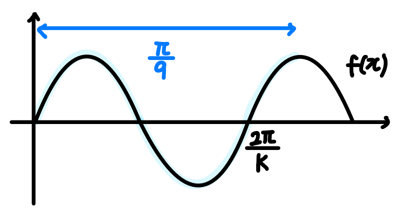
> $g(t)$는 상수함수가 아니고, 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$보다 크다.

33

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$ 이다.

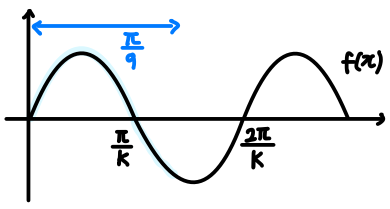
① $\frac{2\pi}{k} \le \frac{\pi}{9}$ $(k \ge 18)$

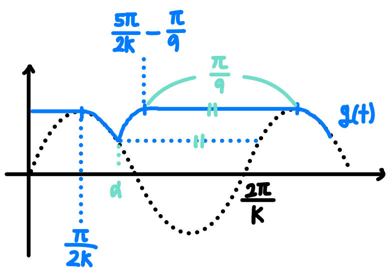
이 경우 $g(t)=1$ 이다.



주기 $\le \frac{\pi}{9}$이므로 t를 어떻게 잡더라도 $\left[t,\ t+\frac{\pi}{9}\right]$에 극대가 포함된다.

② $\frac{\pi}{k} < \frac{\pi}{9} < \frac{2\pi}{k}$ $(9<k<18)$



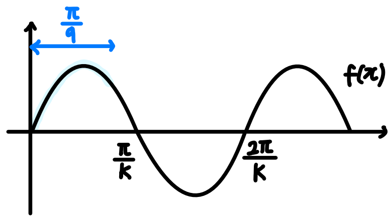


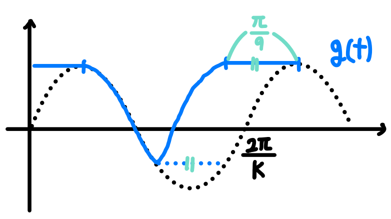
$\alpha = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{2k} + \frac{5\pi}{2k} - \frac{\pi}{9}\right) = \frac{3\pi}{2k} - \frac{\pi}{18}$ 이고,

$\sin k\alpha = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{18}k\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{18}k < \frac{2}{3}\pi$ 이다.

따라서 이 경우 $15<k<18$ 이고, 가능한 k는 16, 17이다.

③ $\frac{\pi}{k} \ge \frac{\pi}{9}$ $(k \le 9)$





이 경우 $g(t)$의 최솟값 ≤ 0 이기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 가능한 모든 k의 값의 합은 $16+17=33$ 이다.

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 부등식

$$f'(x) \le 3 \le f(x)$$

불연속성에 주목

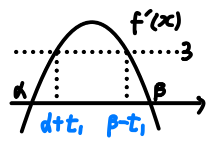
을 만족시키는 실수 x는 오직 1과 4뿐이다. $f(7)$의 값을 구하시오. [4점]

39

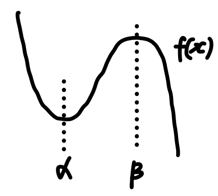
Step1

먼저 $f'(x) \le 3$을 기준으로 살펴보자.

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우



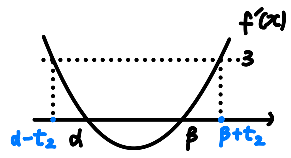
$f'(x) \le 3 \iff x \le \alpha+t_1$ or $x \ge \beta - t_1$



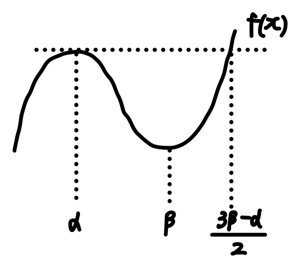
이 경우 $f'(x) \le 3 \le f(x)$인 x가 연속적으로 존재하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

($x \to -\infty$ 인 상황 생각해보기)

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우



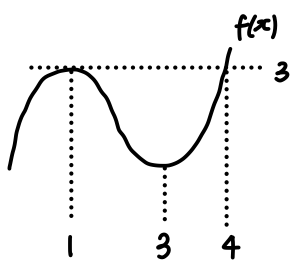
$f'(x) \le 3 \iff \alpha - t_2 \le x \le \beta + t_2$



만약 극댓값<3 이라면 부등식을 만족시키는 x는 1개이거나 구간 형태로 나올 것이다.
극댓값>3 이라면 부등식을 만족시키는 x는 구간 형태로 나올 것이다.

따라서 $f(x)$의 극댓값은 3이고, $f(x) \ge 3$인 x는 $x=\alpha$, $x \ge \frac{3\beta-\alpha}{2}$ 이다.

Step2



$\alpha = 1$ 이고, $\beta + t_2 = \frac{3\beta - \alpha}{2} = 4$ 이다.

$\Rightarrow \alpha=1,\ \beta=3,\ t_2=4$

$f(x) = k(x-1)^2(x-4)+3$ 이라 한다면

$f'(x) = 3k(x-1)(x-3)$ 이고,

$f'(\beta+t_2) = f'(4) = 9k = 3$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$이다.

그러므로 $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-4)+3$ 이고, $f(7)=39$ 이다.

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

8. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가

$$v(t)=3t^2-6t+k$$

이다. 점 P의 가속도가 0인 순간 점 P의 위치는 4일 때, $t=2$인 순간 점 P의 위치는? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Step1 K 구하기

$a(t)=6t-6$ 이므로 $a(1)=0$ 이다.
따라서 $t=1$일 때 $x(1)=4$이다.
$x(t)=t^3-3t^2+kt$ 이므로 ($\because x(0)=0$)
$x(1)=k-2=4$ 이고 $k=6$ 이다.

Step2 $x(2)$ 구하기

$x(t)=t^3-3t^2+6t$ 이므로 $x(2)=8$ 이다.

9. $0<x<2\pi$인 실수 x에 대한 방정식

$$2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

의 모든 실근의 합은? [4점]

① $\frac{11}{4}\pi$ ② 3π ③ $\frac{13}{4}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{15}{4}\pi$

Step1 각변환, 식 변형

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=-\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x-\pi\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
$\therefore \cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

step2

주어진 방정식은 $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$ 과 같다.
위 방정식은 $\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=0$ 과 같다.
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ 이거나 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$의 근은,
$x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{13}{6}\pi$ 의 근과 같으므로, ($\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+x<\frac{9}{4}\pi$ 이므로)
주어진 방정식의 근은 $x=\frac{7}{12}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{23}{12}\pi$ 이고,
모든 실근의 합은 $\frac{15}{4}\pi$ 이다.

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\,1)$에서의 접선을 x축에 대하여 대칭시킨 직선은 곡선 $y=\int_1^x f(t)dt$와 $(3,\,1)$에서 접한다. $f(4)$의 값은? [4점]

① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

Step1

$f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선을 x축에 대해 대칭시킨 직선을 $g(x)$라 하자.
$g(x)$는 $(2,-1)$과 $(3,1)$을 지나므로, $g(x)=2x-5$ 이다.
$(2,1)$을 x축에 대해 대칭이동

Step2

$y=\int_1^x f(t)\cdot dt$와 $g(x)$가 $(3,1)$에서 접하므로,
함숫값이 동일함을 이용하면 $\int_1^3 f(t)\cdot dt=g(3)=1$ 이고,
미분계수가 동일함을 이용하면 $f(3)=2$이다.

Step3 $f(x)$ 구하기

$f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선은 $g(x)$를 x축에 대해 대칭시킨 직선이므로,
$y=-2x+5$ 이다.
$f(x)=p(x-2)^2(x-a)-2x+5$ 라 한다면, (단, $p\neq0$)
$f(3)=p(3-a)-1=2$ 이므로 $p(3-a)=3$ 이고,
$\int_1^3 f(t)\cdot dt=\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)\cdot dx+\left[-x^2+5x\right]_1^3=1$ 이다.
$\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)\cdot dx=p\int_1^3 x^3-(a+4)x^2+(4a+4)x-4a\cdot dx$
$=p\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+4}{3}x^3+(2a+2)x^2-4ax\right]_1^3$
$=p\times\frac{4-2a}{3}$ 이므로
$p\times\frac{4-2a}{3}+2=1$ 이다.

Step4

$p(3-a)=3$ 이고, $p(4-2a)=-3$ 이므로
$\frac{3}{3-a}=\frac{-3}{4-2a}=p$ 이다.
따라서 $a=\frac{7}{3}$, $p=\frac{9}{2}$ 이고,
$f(x)=\frac{9}{2}(x-2)^2\left(x-\frac{7}{3}\right)-2x+5$ 이므로
$f(4)=27$ 이다.

11. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_3a_4a_5<0,\ a_2+a_7=8$$

일 때, a_9의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① 47 ② 49 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

$a_2+a_7=8$ 이므로 $a_4+a_5=8$ 이다.
이때 a_n의 공차가 자연수이기 때문에 a_5는 양수이다.
따라서 $a_3\times a_4$가 음수이므로 a_3은 음수, a_4는 양수이다.
$a_n=a+(n-1)d$라 하면, (단, d는 자연수)
$a_4=\underbrace{8-a_5}_{a_4+a_5=8}=\underbrace{a_5-d}_{a_5=a_4+d}$ 이므로
$a_5=4+\frac{d}{2}$, $a_4=a_5-d=4-\frac{d}{2}$, $a_3=a_5-2d=4-\frac{3}{2}d$ 이다.
이때 $a_4=4-\frac{d}{2}>0$ 이므로 $d<8$ 이고,
$a_3=4-\frac{3}{2}d<0$ 이므로 $d>\frac{8}{3}$ 이다.
따라서 가능한 자연수 d의 값은 $3, 4, 5, 6, 7$ 이고,
$a_9=a_5+4d=(4+\frac{d}{2})+4d=4+\frac{9}{2}d$ 이므로
a_9의 값의 최댓값은 $\frac{71}{2}$, 최솟값은 $\frac{35}{2}$ 이다.
그러므로 a_9의 최댓값과 최솟값의 합은 53이다.

12. 두 상수 a, b와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x-1)\times(x^2-t+1)=0$$

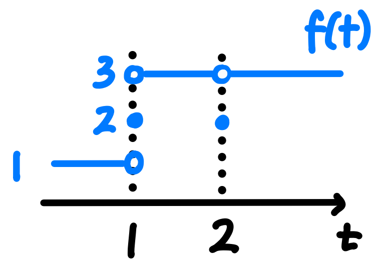
의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> $(t-a)\times|f(t)-b|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

Step1 $f(t)$ 구하기
$t<1$일 때 $f(t)=1$ (주어진 방정식의 실근은 $x=1$의 1개)
$t=1$일 때 $f(t)=2$ ($x=0$, $x=1$의 2개)
$1<t<2$일 때 $f(t)=3$ ($x=1$, $x^2-t+1=0$의 1이 아닌 서로 다른 근 2개)
$t=2$일 때 $f(t)=2$ ($x=-1$, $x=1$의 2개)
$t>2$일 때 $f(t)=3$ ($x=1$, $x^2-t+1=0$의 1이 아닌 서로 다른 근 2개)

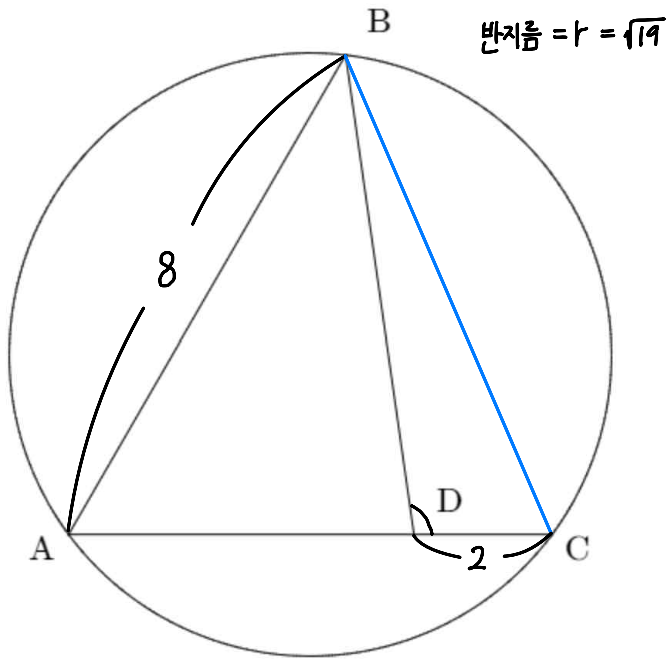


Step2
$|f(t)-b|$의 불연속점이 최대 1개여야 $(t-a)\times|f(t)-b|$가 연속일 수 있다.
$f(t)$가 $t=t_1$에서 불연속인데, $|f(t)-b|$는 $t=t_1$에서 연속이려면
$t=t_1$에서 $f(t)$의 좌극한, 우극한, 함숫값 중 2개 값이 같아야 한다.
즉, $t_1=2$ 이므로 $|f(t)-b|$는 $t=2$에서 연속이고,
$|2-b|=|3-b|$여야 하므로 $b=\frac{5}{2}$ 이다.
또한 $t=1$에서 $(t-a)\times|f(t)-b|$가 연속이어야 하므로,
$t=1$에서 $t-a=0$ 이고 $a=1$ 이다.
그러므로 $a+b=\frac{7}{2}$ 이다.

13. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{19}$인 원 위의 세 점 A, B, C가 있다. $\overline{AB}=8$이고, 선분 AC 위의 한 점 D가

$$\overline{CD}=2,\ \cos(\angle BDC)=-\frac{1}{7}$$

을 만족시킨다. 삼각형 ABD의 넓이는? [4점]



① $8\sqrt{3}$　② $9\sqrt{3}$　③ $10\sqrt{3}$　④ $11\sqrt{3}$　⑤ $12\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면,
$2r \times \sin\angle ACB = \overline{AB}$ 이므로

$\sin\angle ACB = \dfrac{\overline{AB}}{2r} = \dfrac{4\sqrt{19}}{19}$ 이다.

또한 $\cos\angle BDC = -\frac{1}{7}$ 이므로 $\cos\angle BDA = \frac{1}{7}$, $\sin\angle BDC = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ 이다.
삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해
$\overline{BD} : \overline{BC} = \sin\angle BCD : \sin\angle BDC = 7 : \sqrt{57}$ 이므로
$\overline{BD} = 7t$, $\overline{BC} = \sqrt{57}t$라 할 수 있다. (단, $t>0$)
삼각형 BCD에서 코사인법칙을 적용하면
$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos\angle BDC$ 이므로
$57t^2 = 49t^2 + 2^2 - 2\times 7t\times 2\times\left(-\frac{1}{7}\right)$ 이고,
정리하면 $2t^2 - t - 1 = 0$ 이고 $t=1$ 이다.
따라서 $\overline{BD}=7$, $\overline{BC}=\sqrt{57}$ 이다.
삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면,
$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\cos\angle BDA$ 이므로,
$(\overline{AD})^2 - 2\times(\overline{AD}) - 15 = 0$ 이고 $\overline{AD} = 5$ 이다.
또한 $\cos\angle ADB = \frac{1}{7}$ 이므로 $\sin\angle ADB = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ 이고,
따라서 $[\triangle ADB] = \frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\sin\angle ADB$
$= \frac{1}{2}\times 5\times 7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$
$= 10\sqrt{3}$ 이다.

14. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)<1$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 열린구간 $(1, \infty)$에서 방정식 $f'(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. $(-\infty, \infty)$에서 최대 2개 존재

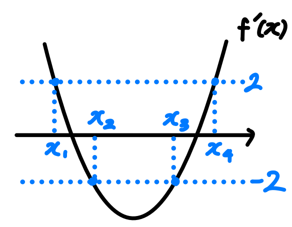
ㄴ. 열린구간 $(1, \infty)$에서 방정식 $|f'(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

ㄷ. 열린구간 $(1, \infty)$에서 방정식 $|f'(f(x))|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 8이상이다. $f(x)=x_1, x_2, x_3, x_4$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

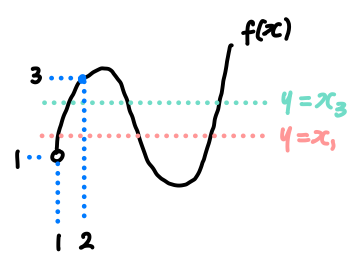
ㄱ. 평균값정리에 의해
$(1,2)$에서 $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 2 = f'(x_1)$ 인 x_1이 존재
$(2,3)$에서 $\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} = f'(c) < -2$ 인 c 존재.
또한 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ 이므로 다항함수 $f'(x)$에 대해 사잇값 정리를 적용하면,
(c, ∞)에 $f'(x_2)=2$인 x_2가 존재.

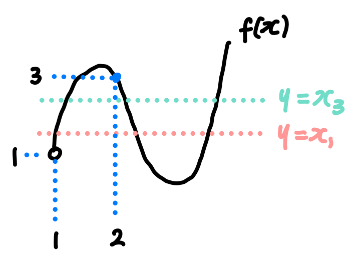
ㄴ. ㄱ을 통해 $f(x)$의 최솟값은 -2보다 작다는 점을 알 수 있다.



ㄱ에서 확인했듯이 $f'(x)=2$를 만족시키는 $x=x_1$, $x=x_2$는 $(1,\infty)$에 존재한다.
또한 $f'(x)=-2$를 만족시키는 $x=x_3$, $x=x_4$는 (x_1, x_2)에 존재하므로, (그래프로 파악 가능 / 사잇값정리 사용하는 풀이는 자편해설 참고)
$(1,\infty)$에서 $|f'(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 x_1, x_2, x_3, x_4의 4개이다.

ㄷ. 구간 $(1,\infty)$에서 $f(x)=x_1, x_2, x_3, x_4$ 의 실근의 개수를 세어보자.
이때 $1<x_1<2$ 이고, $2<c<3$ 이므로 $x_1<x_3<3$ 이다. (ㄱ 참고)
그러므로 $f(x)=x_1$과 $f(x)=x_3$의 서로 다른 실근의 개수는 각각 3개씩 존재한다.





또한 $x_3<x_4<x_2$ 이므로,
$f(x)=x_4$와 $f(x)=x_2$의 실근은 최소 1개씩 존재한다.
따라서 $|f'(f(x))|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 최소 $3+3+1+1=8$개이다.
($f(x)=x_4$와 $f(x)=x_2$의 근의 개수에 따라 8보다 큰 수도 가능하다.)

15. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_{n+6}=a_n$이고 $a_{n+3}=2|a_n|-3$이다.
>
> (나) $a_1<a_2<a_4<a_3$

$\sum_{k=1}^{35} a_k$의 값은? [4점]

① $\frac{63}{5}$ ② 15 ③ $\frac{67}{5}$ ④ $\frac{69}{5}$ ⑤ $\frac{71}{5}$

Step1 (가) 조건 해석

만약 $a_n \geq 0$ 이라면,

$a_{n+3}=2a_n-3$ 이고,

$a_n \geq \frac{3}{2}$일 경우 $a_{n+6}=4a_n-9$ 이고

$0 \leq a_n < \frac{3}{2}$일 경우 $a_{n+6}=-4a_n+3$ 이다.

이때 $a_n=a_{n+6}$ 이므로,

$a_n \geq \frac{3}{2}$일 경우 $4a_n-9=a_n$ 이므로 $a_n=3$ 이며,

$0 \leq a_n < \frac{3}{2}$일 경우 $-4a_n+3=a_n$ 이므로 $a_n=\frac{3}{5}$이다.

또한 $a_n<0$ 이라면,

$a_{n+3}=-2a_n-3$ 이고,

$-\frac{3}{2}<a_n<0$ 일 경우 $a_{n+6}=4a_n+3$ 이고,

$a_n \leq -\frac{3}{2}$일 경우 $a_{n+6}=-4a_n-9$ 이다.

이때 $a_n=a_{n+6}$ 이므로

$-\frac{3}{2}<a_n<0$ 일 경우 $4a_n+3=a_n$ 이므로 $a_n=-1$ 이며,

$a_n \leq -\frac{3}{2}$일 경우 $-4a_n-9=a_n$ 이므로 $a_n=-\frac{9}{5}$ 이다.

따라서 가능한 a_n의 값은 $3, \frac{3}{5}, -1, -\frac{9}{5}$ 이다.

step2 (나) 조건 해석

$a_1=3$이라면 $a_4=2a_1-3=3$ 이고, $a_1=a_4$ 이므로 $a_1 \neq 3$이다.

$a_1=\frac{3}{5}$라면 $a_4=2a_1-3=-\frac{9}{5}$ 이고, $a_1>a_4$ 이므로 $a_1 \neq \frac{3}{5}$ 이다.

$a_1=-1$ 이라면 $a_4=-2a_1-3=-1$ 이고, $a_1=a_4$ 이므로 $a_1 \neq -1$ 이다.

$a_1=-\frac{9}{5}$라면 $a_4=-2a_1-3=\frac{3}{5}$이므로 가능한 a_1의 값은 $-\frac{9}{5}$이다.

Step3

$a_1=-\frac{9}{5}$, $a_4=\frac{3}{5}$ 이므로 $a_1<a_2<a_4$ 인 $a_2=-1$, $a_5=-1$ 이며,

$a_3>a_4$ 인 $a_3=3$, $a_6=3$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{35} a_k &= (a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{34}) \\ &+(a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{35}) \\ &+(a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{33}) \\ &=\left(-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}\right)\times 6+(-1)\times 12+3\times 11 \\ &=\frac{69}{5}\end{aligned}$$

이다.

단답형

20. 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(0)F(x)=x^2f'(x)+f(2)x+F(0)$$

을 만족시킨다. $F(2)$의 값을 구하시오. [4점] 32

Step1 $F(x)$, $f(x)$, $f'(x)$ 설정하기

$f(x)$는 이차함수이므로 $F(x)$는 삼차함수이고,

$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 할 수 있다. (단, $a \neq 0$)

x에 대해 미분하면,

$f(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(x)=6ax+2b$ 이다.

Step2

$$\begin{aligned}f(0)F(x)&=c\times(ax^3+bx^2+cx+d)\\&=acx^3+bcx^2+c^2x+cd\end{aligned}$$

$x^2f'(x)=6ax^3+2bx^2$

$f(2)x=(12a+4b+c)x$

$F(0)=d$

Step3

모든 실수 x에 대하여

$\underline{acx^3}+\underline{bcx^2}+\underline{c^2x}+\underline{cd}=\underline{6ax^3}+\underline{2bx^2}+\underline{(12a+4b+c)x}+\underline{d}$

이므로

$c=6, b=0, a=\frac{5}{2}, d=0$ 이다.

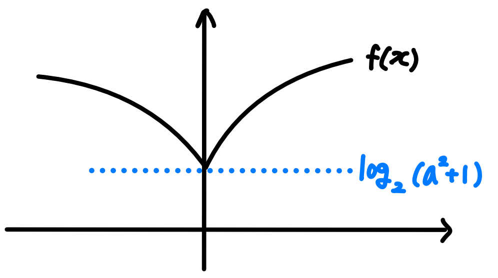
그러므로 $F(x)=\frac{5}{2}x^3+6x$ 이고, $F(2)=32$ 이다.

21. 양수 a와 함수 $f(x)=\log_2(|x|+a^2+1)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 닫힌구간 $[t, t^2+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 1이 되도록 하는 모든 실수 t의 합은 $\frac{3}{2}$이다.

$24a$의 값을 구하시오. [4점] 18

Step1

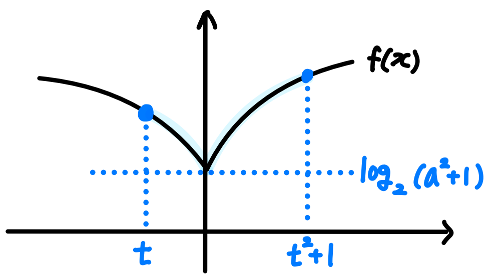


t^2+1은 양수이고, $|t|<t^2+1$이다.

$t^2-|t|+1=(|t|-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

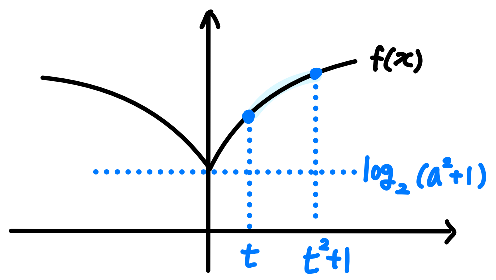
Step2

$t\le 0$이라면 구간 내 최솟값은 $f(0)=\log_2(a^2+1)$이고,
구간 내 최댓값은 $f(t^2+1)=\log_2(t^2+1+a^2+1)$이다.



이때 최댓값과 최솟값의 차이가 1이므로,
$\log_2(t^2+1+a^2+1)-\log_2(a^2+1)=\log_2(\frac{t^2+1}{a^2+1}+1)=1$이고,
정리하면 $t=-a$이다.

$t>0$이라면 구간 내 최솟값은 $f(t)=\log_2(t+a^2+1)$이고,
구간 내 최댓값은 $f(t^2+1)=\log_2(t^2+1+a^2+1)$이다.



이때 최댓값과 최솟값의 차이가 1이므로,
$\log_2(t^2+1+a^2+1)-\log_2(t+a^2+1)=1$이고,
양수인 t는 $t=1+\sqrt{a^2+1}$이다.

Step3

모든 실수 t의 값의 합은
$1+\sqrt{a^2+1}+(-a)=\frac{3}{2}$이므로, $a=\frac{3}{4}$이다.
그러므로 $24a$의 값은 18이다.

22. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 값이 10 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 실수 x의 값을 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{19}$이다. α_k라 하자.

$$f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0,\quad \alpha_{16}=\frac{3}{2}$$

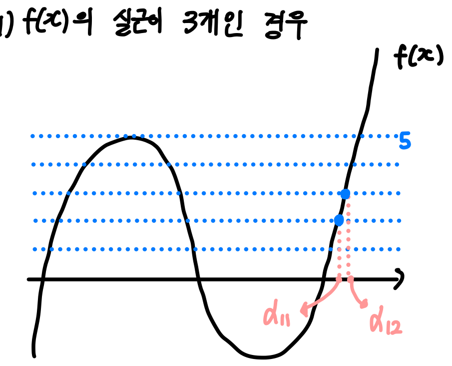
이고 α_7은 정수일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점] 259

Step1

만약 $f(x)$가 증가함수였다면 α_k의 개수가 10개였을 것이므로, $f(x)$는 극대극소를 모두 가지는 개형이다.
또한 $f(x)$의 극댓값이 0 이하의 값이라면, $f(x)$의 치역이 0보다 큰 구간에서 $f(x)$는 일대일대응이므로, α_k의 개수는 10개이기 때문에 $f(x)$의 극댓값은 0보다 커야한다.
10이하의 자연수 n에 대하여 $f(x)=n$의 실근이 1개인 n의 개수를 p, $f(x)=n$의 실근이 3개인 n의 개수를 q라 하자. (단, n은 자연수, p와 q는 0이상의 정수)
$f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 존재하지 않는다면, $p+q=10$이고, $p+3q=19$이므로 $p=5.5$, $q=4.5$이며, 이는 p와 q가 자연수라는 조건에 모순이다.
따라서 $f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 존재하고, $p+q=9$이며 $p+3q+2=19$이므로 $p=5$, $q=4$이다.

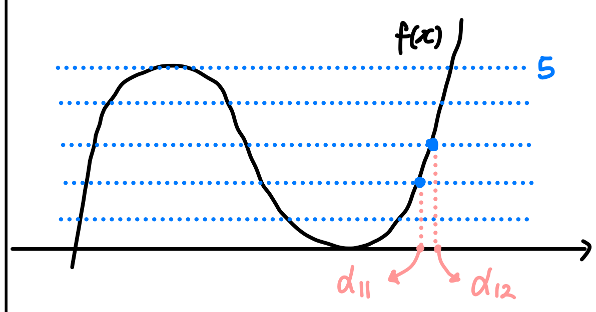
Step2

1) $f(x)$의 실근이 3개인 경우



이 경우 $f'(\alpha_{11})>0$, $f'(\alpha_{12})>0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

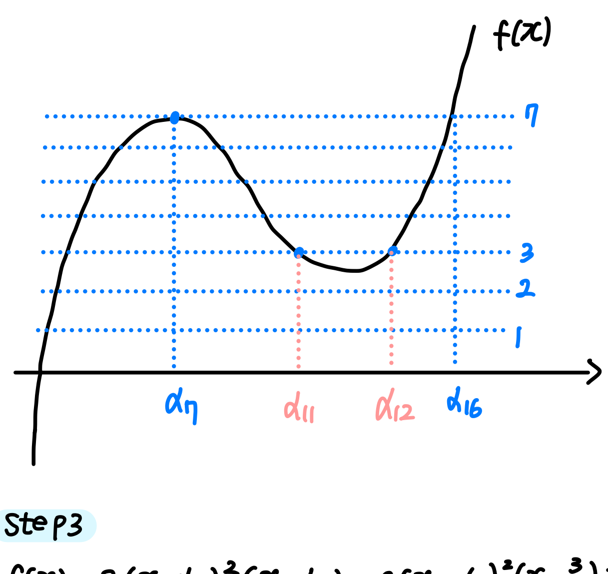
2) $f(x)$의 실근이 2개인 경우



이 경우 $f'(\alpha_{11})>0$, $f'(\alpha_{12})>0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

3) $f(x)$의 실근이 1개인 경우

p와 q의 값이 정해져 있으므로, $f(x)$가 극댓값을 가지는 x는 아무리 커봤자 α_{10}과 α_{11} 사이의 값이고, 그러므로 $f(x)$의 극솟값이 정수라면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})\ge 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $f(x)$의 극댓값이 정수이며, $f'(\alpha_{11})<0$, $f'(\alpha_{12})>0$이다. 이를 만족시키는 $f(x)$의 극솟값은, $2<$ 극솟값 <3이어야 한다.



Step3

$f(x)=2(x-\alpha_7)^2(x-\alpha_{16})=2(x-\alpha_7)^2(x-\frac{3}{2})$라 하면,
$2<7-\frac{4}{27}(\frac{3}{2}-\alpha_7)^3<3$이므로 정수 α_7의 값은 -1이다.
따라서 $f(x)=2(x+1)^2(x-\frac{3}{2})+7$이므로 $f(5)=259$이다.

제 2 교시 수학 영역

1회 정답

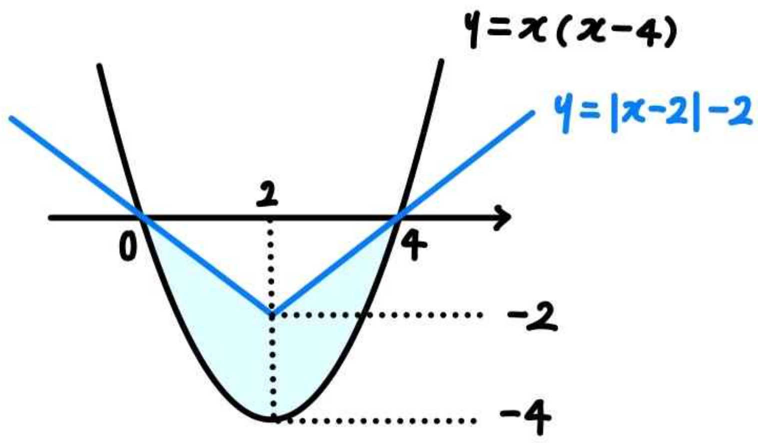
8	②	9	②	10	①	11	③	12	③
13	②	14	④	15	④	20	45	21	33
22	39								

8.

정답: ②

해설:

두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 x축과 $y=x(x-4)$로 둘러싸인 부분의 넓이에서, x축과 $y=|x-2|-2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 값이다.



x축과 $y=x(x-4)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{6}\times|1|\times4^3=\frac{32}{3}$이고,

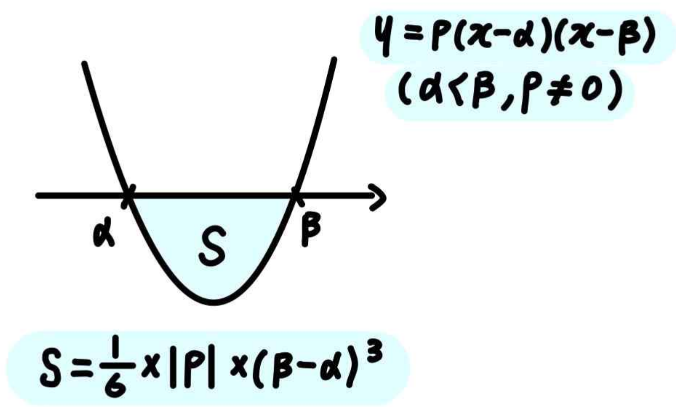
x축과 $y=|x-2|-2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$이므로,

두 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{32}{3}-4=\frac{20}{3}$이다.

여담:

두 넓이의 차이로 해석해보고, 넓이공식 복습하고 넘어가자.



9.

정답: ②

해설 1: 수식적으로 해결하기

$\int_0^{t_1}|3-t|dt=5$인 시각 t_1을 찾아보면,

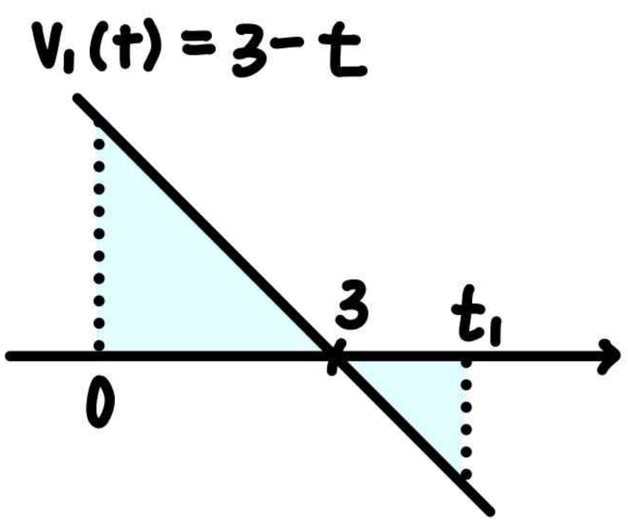
$\int_0^{3}(3-t)dt=\frac{9}{2}$이므로 $t_1>3$이고,

$\int_3^{t_1}(t-3)dt=\frac{1}{2}$이어야 하므로 $t_1=4$이다.

따라서 점 Q의 위치는 (처음위치)+(위치의 변화량)이므로

$0+\int_0^4 tdt=8$ 이다.

해설 2: 그래프로 해결하기



출발한 시각부터 $t=t_1$까지 점 P의 움직인 거리는

$\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times(t_1-3)^2=5$이므로 $t_1=4$이다.

따라서 점 Q의 위치는 (처음위치)+(위치의 변화량)이므로

$0+\int_0^4 tdt=8$ 이다.

여담:

1. p의 이동거리를 구할 때 그래프로 살펴보면 편하다.

2. (나중위치)=(처음위치)+(위치의 변화량)

10.

정답: ①

해설:

step1

근과 계수와의 관계를 이용하면

$a_3+a_4=-2a_1$이고, ……ㄱ

$a_3\times a_4=-2a_2$이다. ……ㄴ

step2

$a_n=a+(n-1)d$ (단, $d\neq0$)라 하면,

ㄱ에 의해 $2a+5d=-a$이고,

ㄴ에 의해 $(a+2d)(a+3d)=-2(a+d)$이다.

위 식을 정리하면 $a=-\frac{5}{3}d$이므로 $\frac{1}{3}d\times\frac{4}{3}d=\frac{4}{3}d$이고,

따라서 $d=3$, $a=-5$이다.

step3

그러므로 $a_6=a+5d=10$이다.

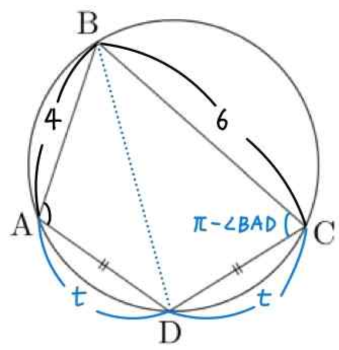
여담:

근과 계수와의 관계에 주목하자.

11.

정답: ③

해설:



step1

보조선 $\overline{BD}$를 그어보면, 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에 대해 코사인 법칙을 사용할 수 있다.

이때 사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로

$\angle BCD = \pi - \angle BAD$이고, $\cos\angle BCD = -\cos\angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

step2

$\overline{AD} = \overline{CD} = t$라 하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$(\overline{BD})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AD})^2 - 2\times(\overline{AB})\times(\overline{AD})\times\cos\angle BAD$이므로,

$(\overline{BD})^2 = 4^2 + t^2 - 2\times4\times t\times(-\frac{\sqrt{3}}{6})$이고,

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 적용하면

$(\overline{BD})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{CD})^2 - 2\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\cos\angle BCD$이므로,

$(\overline{BD})^2 = 6^2 + t^2 - 2\times6\times t\times\frac{\sqrt{3}}{6}$이다.

따라서

$(\overline{BD})^2 = t^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}t + 16 = t^2 - 2\sqrt{3}t + 36$이므로 $t = 2\sqrt{3}$이다.

step3

사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD와 삼각형 BCD의 넓이의 합과 같고,

$\cos\angle BAD = -\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로 $\sin\angle BAD = \sin\angle BCD = \frac{\sqrt{33}}{6}$이다.

따라서

삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6} = 2\sqrt{11}$이고,

삼각형 BCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6} = 3\sqrt{11}$이므로,

사각형 ABCD의 넓이는

$[\triangle ABD] + [\triangle BCD] = 2\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 5\sqrt{11}$이다.

여담:

1. 주어진 정보들을 보고 보조선 $\overline{BD}$를 그으면 주어진 정보를 전부 활용할 수 있다는 점을 파악해 보조선 긋기.

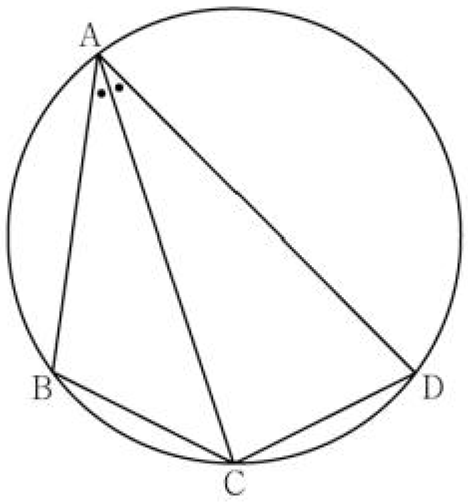
2. 원에 내접하는 사각형에서 마주보는 두 각의 크기의 합은 π 활용하기.

기출 다시보기: 2023학년도 수능 11번

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB} = 5,\ \overline{AC} = 3\sqrt{5},\ \overline{AD} = 7,\ \angle BAC = \angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

정답: 1번

12.

정답: ③

해설:

step1 삼차함수의 세 근의 합 이용하기

점 A의 x좌표를 a라 하자.

삼차함수의 근과 계수와의 관계를 생각할 때,

$f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 삼차항과 이차항의 계수가 동일하기 때문에, 두 방정식의 세 근의 합은 동일하다.

따라서 $f(x)=0$의 세 근의 합은 $-1+(-1)+a=a-2$이다.

step2

방정식 $f(x)=10x-16$의 세 근의 합도 $a-2$이기 때문에,
$y=f(x)$와 $y=10x-16$은 $(a, f(a))$에서 접하고
$(-a-2, f(-a-2))$에서 만난다.

그러므로 $f(x)-(10x-16)=(x-a)^2(x+a+2)$이고,
$f(-1)=1$이므로 위 식에 $x=-1$을 대입하면 $a=2$이다.

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x+4)+10x-16$이고, $f(3)=21$이다.

여담:

$f(x)=0$과 $f(x)-(px+q)=0$의 세 근의 합은 동일하다는 점, 자주 쓰이는 논리니까 알아두기.

13.

정답: ②

해설:

step1

만약 $f(0)\neq 0$이라면, $k=\dfrac{2-2}{0\text{이 아닌 상수}}=0$이다.

주어진 조건에서 k는 0이 아닌 실수이기 때문에, $f(0)=0$이다.

step2

$f(x)=ax^2+2x$ 라 하자. (단, $a\neq 0$)

주어진 극한을 정리하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-\sqrt{x+4}}{f(x)+f(-x)}=\lim_{x\to0}\frac{2ax+2-\sqrt{x+4}}{2ax^2}=k\text{이고,}$$

유리화하면

$$\lim_{x\to0}\frac{4a^2x^2+(8a-1)x}{2ax^2(2ax+2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to0}\frac{4a^2x+(8a-1)}{8ax}=k\text{이다.}$$

이때 k의 값이 존재하므로 $8a-1=0$이므로 $a=\dfrac{1}{8}$이고,

$$k=\lim_{x\to0}\frac{4a^2x+(8a-1)}{8ax}=\frac{a}{2}=\frac{1}{16}\text{이다.}$$

여담:

차근차근 실수만 안 하게 조심하자.

14.

정답: ④

해설:

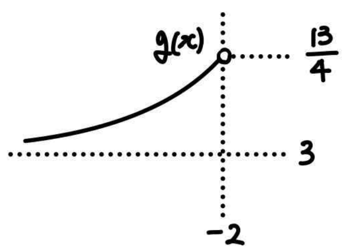
step1 조건을 만족시키는 t의 불연속성에 초점 맞춰 해석하기

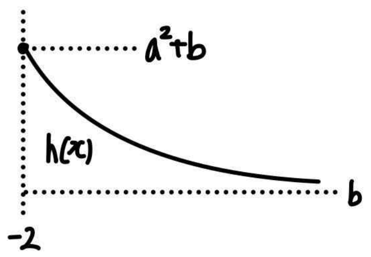
방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 불연속적으로 나온다.

$g(x)=2^x+3\ (x<-2)$

$h(x)=a^{-x}+b\ (x\geq -2)$ 라 하자.

이때 $g(x)$의 치역은 $(3,\frac{13}{4})$이고, $h(x)$의 치역은 $(b,a^2+b]$이다.





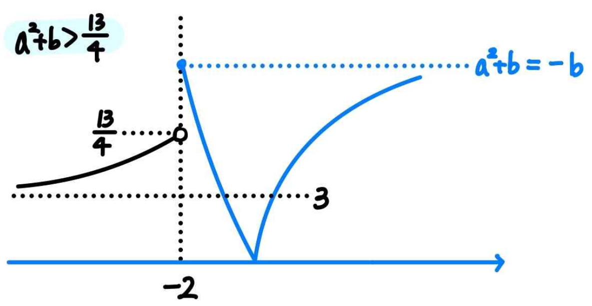
만약 $g(x)$의 치역이 $h(x)$의 치역에 일부라도 포함되지 않는다면, 포함되지 않는 구간에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t는 연속적으로 나온다.

그러므로 $(3,\frac{13}{4})\subset(b,a^2+b]$이고, $b\leq 3$, $a^2+b\geq\frac{13}{4}$이다.

만약 $0\leq b\leq 3$이라면 구간 $(b,3)$에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t는 연속적으로 나올 것이므로, $b<0$이다.

step2

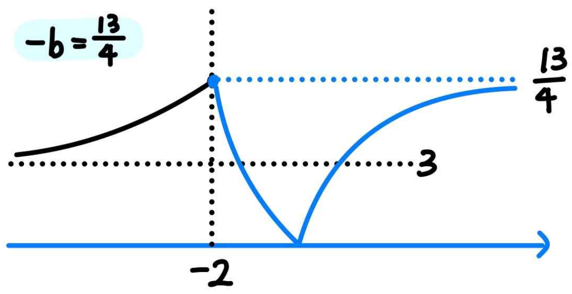
만약 $a^2+b>\frac{13}{4}$라면, 구간 $(\frac{13}{4},a^2+b)$에서 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 연속적으로 나오면 안 되므로 $-b\geq a^2+b$이고, $(a^2+b,-b)$에서도 실수 t가 연속적으로 나오면 안 되므로 $-b=a^2+b$이다.



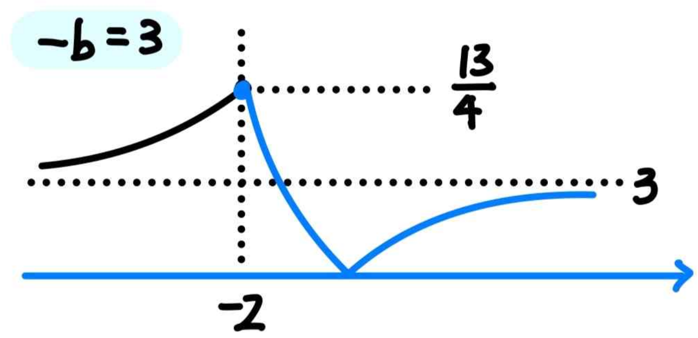
이때 조건을 만족시키는 t는 $t=0$, $t=a^2+b$의 2개이므로 구하는 상황이 아니다.

그러므로 $a^2+b=\frac{13}{4}$이고, 마찬가지로 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 불연속적이라는 논리를 이용하면 $-b=\frac{13}{4}$ 또는 $-b=3$이다.

만약 $-b=\frac{13}{4}$이라면, 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t 는 $t=0$, $t=\frac{13}{4}$의 2개이므로 조건을 만족시키지 않는다.



그러므로 $-b=3$이고, 이 경우 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t는 $t=0$, $t=3$, $t=\frac{13}{4}$의 3개이다.



따라서 $b=-3$, $a^2+b=\frac{13}{4}$이므로 $a=\frac{5}{2}$이다.

그러므로 $a^2+b^2=\frac{61}{4}$이다.

여담:

1. 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 1이 되도록 하는 실수 t가 '**불연속적**'으로 나온다는 점에 주목하기.

2. 만약 불연속성 조건을 이용해 $b<0$을 구하지 않고 시작했다면 따져야 할 경우가 많았을 것이다.

3. 최대한 조건 해석 후 적게 케이스분류하려고 노력했으니, 흐름을 잘 따라가면서 조건 해석하는 논리 잘 보고 넘어가주세요!

기출 다시보기: 2024학년도 9월 모의평가 14번

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

정답: 2번

15.

정답: ④

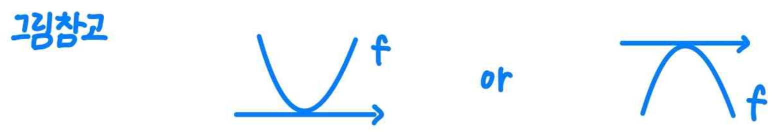
해설:

step1

주어진 식에 $x=0$을 대입하면 $\int_0^3 f(t)dt=0$이거나 $\int_0^2 f(t)dt=0$이다.

만약 $\int_0^2 f(t)dt=0$이라면, $xf(x)=a(x-\int_0^3 f(t)dt)^2\times x$이므로

$f(x)=a(x-\int_0^3 f(t)dt)^2$이고, $f(x)\ge 0$이므로 이 경우 $\int_0^2 f(t)dt$의 값은 0이 될 수 없다.



따라서 $\int_0^3 f(t)dt=0$이다.

step2

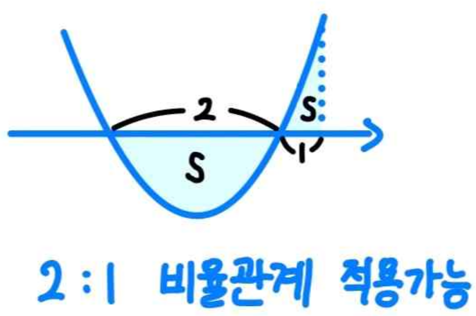
$xf(x)=ax^2(x-\int_0^2 f(t)dt)$이므로 $f(x)=ax(x-\int_0^2 f(t)dt)$이다.

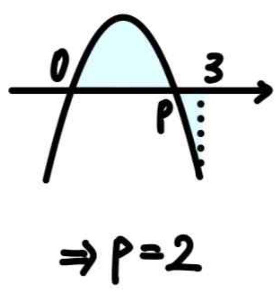
$\int_0^2 f(t)dt=p$라고 한다면 $\int_0^3 ax(x-p)dx=a(9-\frac{9}{2}p)=0$이므로 $p=2$이다.

$\int_0^2 ax(x-2)dx=-\frac{a}{6}\times 2^3=p=2$이므로 $a=-\frac{3}{2}$이다.

여담:

이차함수 넓이 비율관계를 이용하면 p의 값을 계산 없이 구할 수 있다. (p는 0과 3의 $2:1$ 내분점)





20.

정답: 23

해설:

step1 a_1 구하기

$a_1=a$라 하자. (단, $a<0$)

a_1이 음수이기 때문에 $a_2=a_1\times a_1=a^2$이고, $a_2>0$이다.

a_2가 양수이기 때문에 $a_3=a_2-2=a^2-2$이다.

만약 $a^2<2$라면 $a_3<0$이기 때문에 $a_4=a^3-2a$일 것이고, 이때 $a_4+3a_1=a^3+a=0$을 만족시키는 $a=0$이므로 음수가 아니기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a^2\ge 2$이고, $a_3\ge 0$이기 때문에 $a_4=a^2-4$이다.

$a_4+3a_1=a^2+3a-4=0$이고, $a^2\ge 2$와 $a<0$을 동시에 만족시키는 $a=-4$이다.

step2 나열하며 규칙성 찾기

$a_1=-4$이므로 $a_2=16,\ a_3=14,\ \cdots,\ a_9=2,\ a_{10}=0$이고

$a_{11}=-2$이므로 $a_{12}=8,\ a_{13}=6,\ a_{14}=4,\ a_{15}=2,\ a_{16}=0$이다.

즉, $n=11$일 때부터 a_n의 값은 $-2,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$이 반복된다.

a_{11}부터 a_{100}까지 총 90개의 항이 있으므로, 90을 주기 6로 나눠보면 $-2,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$이 몇 번 반복되는지 알 수 있다.

$90=6\times 15$이므로, a_{11}부터 a_{100}까지 $-2,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0$이 15번 반복된다.

그러므로 $|a_m|\le 3$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 $2+3\times 15=47$이다.

따라서 $p=47,\ a_{11}=-2$이므로 $p+a_{11}=45$이다.

여담:

a_n의 범위에 집중하며 a_1의 값 구하고, 나열을 통해 주기를 찾아 p 구하기

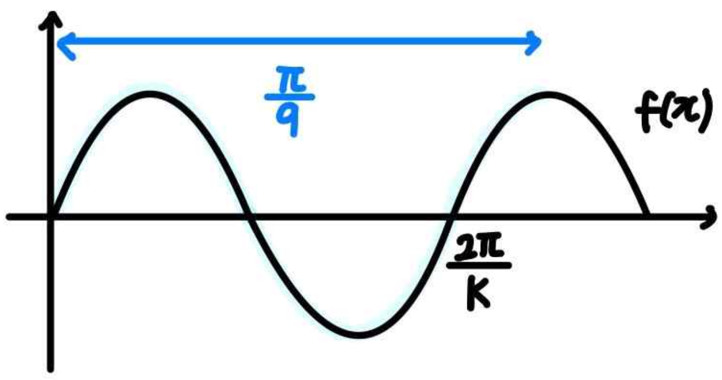
21.

정답: 33

해설:

$f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$이다.

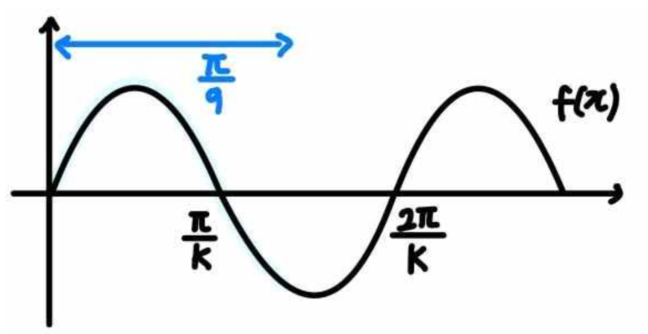
1) $\frac{2\pi}{k}\le\frac{\pi}{9}$인 경우 ($k\ge 18$)

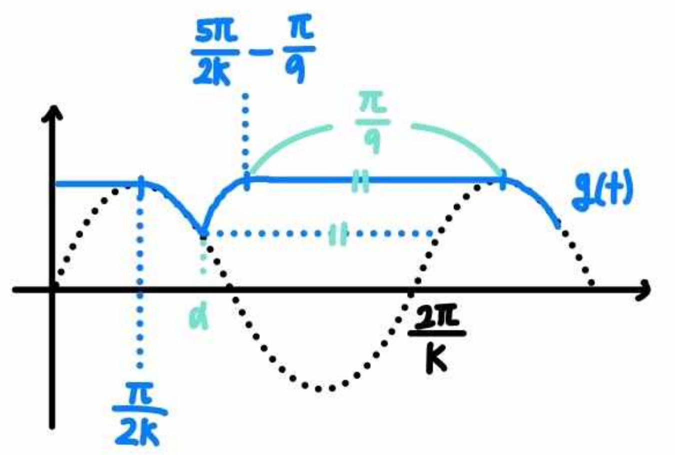


(주기) $\le\frac{\pi}{9}$이므로 t를 어떻게 잡더라고 $[t, t+\frac{\pi}{9}]$에 극대가 포함된다.

따라서 이 경우 $g(t)$는 $g(t)=1$의 상수함수이다.

2) $\frac{\pi}{k}<\frac{\pi}{9}<\frac{2\pi}{k}$인 경우 ($9<k<18$)





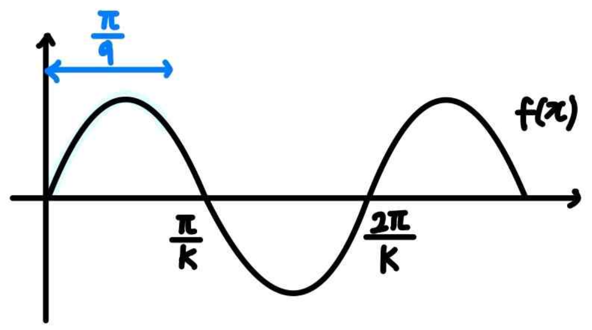
최솟값을 가지는 위치의 x좌표 α는 $\frac{\pi}{2k}$와 $\frac{5\pi}{2k}-\frac{\pi}{9}$의 $1:1$ 내분점이므로 $\alpha=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2k}+\frac{5\pi}{2k}-\frac{\pi}{9})=\frac{3\pi}{2k}-\frac{\pi}{18}$이고,

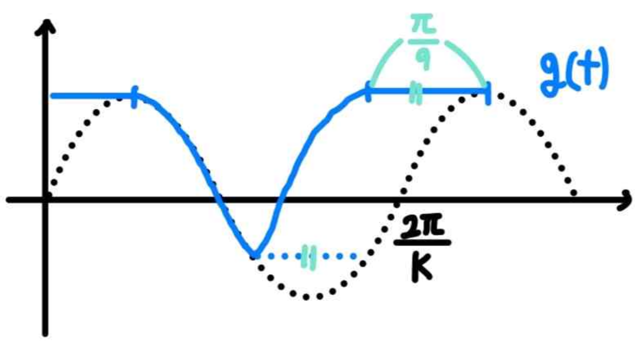
$\sin k\alpha = \sin(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{18}k) > \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{3}{2}\pi - \frac{k}{18}\pi < \frac{2}{3}\pi$이다.

따라서 이 경우 $15 < k < 18$이고, 가능한 k는 16, 17이다.

3) $\frac{\pi}{k} \geq \frac{\pi}{9}$인 경우 $(k \leq 9)$





이 경우 $g(t)$의 최솟값이 0보다 작거나 같기 때문에 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 가능한 모든 k의 값의 합은 $16+17=33$이다.

여담:

$g(t)$의 그래프 그리는 방법이 이해가 잘 안 간다면 유튜브에 있는 지인선의 영상강의를 참고하세요! >_<

22.

정답: 39

해설:

step1

$f(x)$가 증가함수거나 감소함수라면, 주어진 부등식을 만족시키는 x는 존재하지 않거나, 1개거나, 구간 형태로 나오기 때문에

($x \to \infty$, $x \to -\infty$인 상황을 생각해보면 파악하기 쉽다.)

$f(x)$는 극대 극소를 모두 가지는 개형이다.

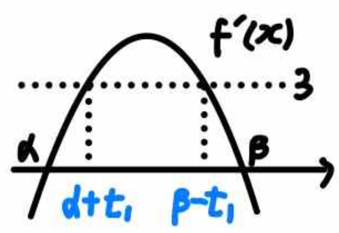
step2

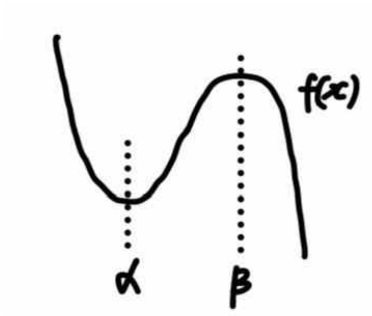
$f'(x)=0$의 두 근을 각각 α, β라 하자. (단, $\alpha < \beta$)

1) $f(x)$의 최고차항 계수가 음수인 경우

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면,

부등식 $f'(x) \leq 3$을 만족시키는 x의 범위는 $x \leq \alpha + t_1$ 또는 $x \geq \beta + t_1$으로 표현할 수 있을 것이다. (단, $t_1 > 0$)



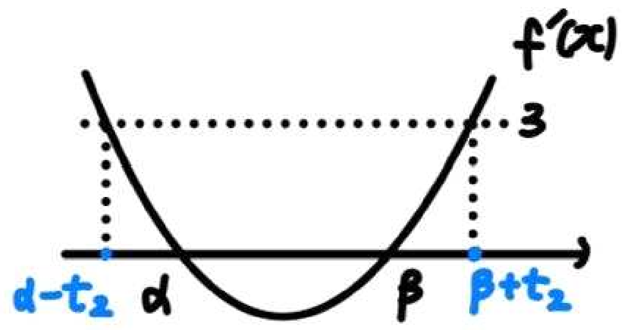


이 경우 $f'(x) \leq 3 \leq f(x)$인 x가 연속적으로 존재하므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. ($x \to -\infty$인 상황을 떠올려보면 이해하기 쉽다.)

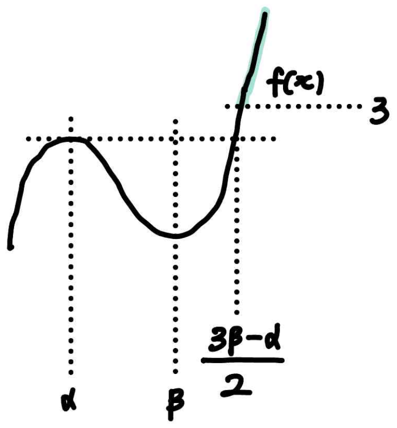
그러므로 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이다.

2) $f(x)$의 최고차항 계수가 양수인 경우

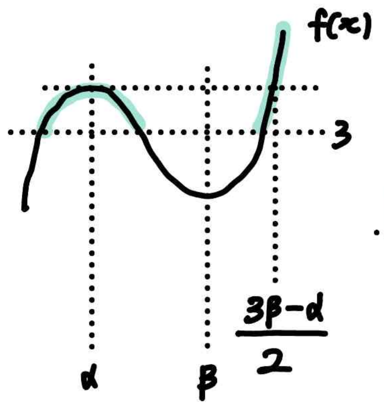
부등식 $f'(x) \leq 3$을 만족시키는 x의 범위를 $\alpha - t_2 \leq x \leq \beta + t_2$로 표현할 수 있다. (단, $t_2 > 0$)

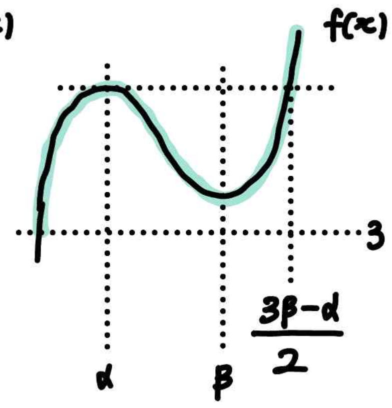


만약 $f(x)$의 극댓값이 3보다 작다면, 부등식을 만족시키는 x는 1개이거나 구간 형태로 나올 것이다.



또한 $f(x)$의 극댓값이 3보다 크다면, 부등식을 만족시키는 x는 구간 형태로 나올 것이다. ($[\alpha, \beta]$ 사이 일부 구간을 생각해보면 이해하기 쉽다.)



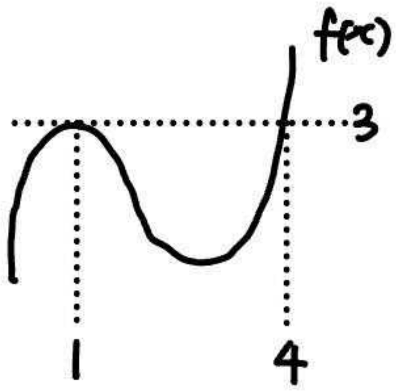


그러므로 $f(x)$의 극댓값은 3이고, $f(x) \geq 3$인 x는 $x=\alpha$, $x \geq \dfrac{3\beta-\alpha}{2}$이다.

따라서 $f'(x) \leq 3 \leq f(x)$인 실수 x가 오직 1과 4뿐이려면

$\alpha=1,\ \beta+t_2=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}=4$여야 하고,

이를 통해 $\beta=3,\ t_2=4$를 알 수 있다.



$f(x)=k(x-1)^2(x-4)+3$이라 한다면, (단, $k>0$)

$f'(x)=3k(x-1)(x-3)$이고,

$f'(\beta+t_2)=f'(4)=9k=3$이므로 $k=\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^2(x-4)+3$이고, $f(7)=39$이다.

여담:

되게 심플해보이는데 생각보단 추론할 요소가 있는... 재밌는 문제입니다.

1회 14번과 비슷하게 조건을 만족시키는 x의 불연속성 논리와, 구간에 신경쓰면서 다시 한 번 풀어보시길 바랍니다!

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

2회 정답

8	②	*9*	⑤	*10*	②	*11*	④	*12*	⑤
13	③	*14*	⑤	*15*	④	*20*	32	*21*	18
22	259								

8.

정답: ②

해설:

step1 k 구하기

$a(t)=6t-6$이므로 $a(1)=0$이다.

따라서 $t=1$일 때 $x(1)=4$이다.

주어진 조건에서 $x(0)=0$이므로, $x(t)=t^3-3t^2+kt$이고,

$x(1)=k-2=4$이므로 $k=6$이다.

step2 $x(2)$ 구하기

$x(t)=t^3-3t^2+6t$이므로 $x(2)=8$이다.

여담:

지인선이 작성한 해설이었으나 그걸 지우고 제가 다시 썼습니다.

연아 미안해ㅠ

9.

정답: ⑤

해설:

$\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=-\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x-\pi\right)=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

이므로,

$\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$이다.

이를 이용하면 방정식 $2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$의 근은

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1=0$의 근과 같고,

이는 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$ 또는 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$을 만족시키는 x와 같다.

x의 범위가 $0<x<\frac{\pi}{4}$이므로,

$\frac{\pi}{4}+x$의 범위는 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+x<\frac{9\pi}{4}$이다.

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$ 또는 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$을 만족시키는 주어진 범위의 $\frac{\pi}{4}+x$의 값은 $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{6}$이므로,

방정식 $2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$의 근은

$x=\frac{7\pi}{12}$, $x=\frac{5\pi}{4}$, $x=\frac{23\pi}{12}$이다.

그러므로 모든 실근의 합은 $\frac{15\pi}{4}$이다.

여담:

1. 범위조심

2. 각변환이 기억 안 나는 친구는... 미적분 선택자라면 $\frac{\pi}{2}$에 대한 덧셈정리로 해결하는 것도 하나의 방법이랍니다.

3. 혹시 몰라 작성하는 $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$ 형태의 각변환 방법

->n이 홀수라면 함수가 바뀌고, n이 짝수라면 함수 그대로!

->$0<\theta<\frac{\pi}{2}$라 할 때, $\theta\pm\frac{n\pi}{2}$가 위치한 사분면에서의 '원래' 삼각함수의 부호가 각변환된 삼각함수의 부호

기출 다시보기: 2019학년도 9월 모의평가 가형 14번

14. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

정답: 3번

10.

정답: ②

해설:

step1

$f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선을 x축에 대해 대칭시킨 직선을 $g(x)$라 하면,

$g(x)$는 $(2,1)$을 x축에 대해 대칭시킨 점인 $(2,-1)$과 $(3,1)$을 지나므로, $g(x)=2x-5$이다.

step2

$y=\int_1^x f(t)dt$와 $y=g(x)$가 $(3,1)$에서 접하므로

함숫값이 동일함을 이용하면 $\int_1^3 f(t)dt=g(3)=1$이고,

미분계수가 동일함을 이용하면 $f(3)=g'(3)=2$이다.

step3

$f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선은 $g(x)$를 x축에 대해 대칭시킨 직선이므로 $y=-2x+5$이다.

$f(x)=p(x-2)^2(x-a)-2x+5$라 한다면, (단, $p\neq 0$)

$f(3)=p(3-a)-1=2$이므로 $p(3-a)=3$이고,

$\int_1^3 f(t)dt=\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)+(-2x+5)dx=1$이다.

또한

$\int_1^3(-2x+5)dx=2$이므로 $\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)dx=-1$이고,

$\int_1^3 p(x-2)^2(x-a)dx=p\int_1^3\{x^3-(a+4)x^2+(4a+4)x-4a\}dx$

$=p\times\frac{4-2a}{3}=-1$

이다.

step4

$p(3-a)=3$, $p\times\frac{4-2a}{3}=-1$이므로 $\frac{3}{3-a}=\frac{-3}{4-2a}=p$이다.

따라서 $a=\frac{7}{3}$, $p=\frac{9}{2}$이고,

$f(x)=\frac{9}{2}(x-2)^2\left(x-\frac{7}{3}\right)-2x+5$이므로 $f(4)=27$이다.

여담:

1. $f(x)$의 $(2,1)$에서의 접선과 이 직선을 x축에 대해 대칭시킨 직선 사이의 관계를 잘 이용하기.

2. 삼차함수 $f(x)$ 위의 점 (a,b)에서의 $f(x)$의 접선을 $g(x)$라 하면,

$f(x)=p(x-a)^2(x-q)+g(x)$라 할 수 있다. (단, $p\neq 0$)

기출 다시보기: 2022학년도 수능 10번

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

정답: 5번

11.

정답: ④

해설:

$a_2+a_7=a_4+a_5=8$이고, 공차가 자연수이기 때문에 a_5는 양수이다.

따라서 $a_3\times a_4$가 음수이므로 a_3은 음수, a_4는 양수이다.

$a_n=a+(n-1)d$라 하면, (단, d는 자연수)

$a_4+a_5=8$에서 $a_4=8-a_5$,

$a_5=a_4+d$에서 $a_4=a_5-d$이므로

$a_5=4+\frac{d}{2}$이고,

$a_4=a_5-d=4-\frac{d}{2}$,

$a_3=a_5-2d=4-\frac{3d}{2}$이다.

이때

$a_4=4-\frac{d}{2}>0$이므로 $d<8$이고,

$a_3=4-\frac{3d}{2}<0$이므로 $d>\frac{8}{3}$이다.

따라서 가능한 자연수 d는 3, 4, 5, 6, 7이고,

$a_9=a_5+4d=\left(4+\frac{d}{2}\right)=4+\frac{9d}{2}$이므로

a_9의 값의 최댓값은 $\frac{71}{2}$, 최솟값은 $\frac{35}{2}$이다.

그러므로 a_9의 최댓값과 최솟값의 합은 53이다.

여담:

1. 공차가 자연수임에 주목해 a_3, a_4의 부호 파악하기
2. a_4와 a_5에 대한 두 관계식을 통해 a_n을 d에 대한 식으로 표현할 수 있다.

12.

정답: ⑤

해설:

step1

t의 범위에 따라 $f(t)$를 구해보면,

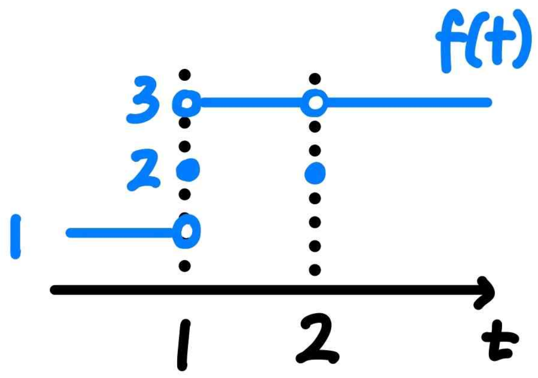
$t<1$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=1$의 1개이므로 $f(t)=1$이고,

$t=1$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=0$, $x=1$의 2개이므로 $f(t)=2$이다.

$1<t<2$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=1$과, $x^2-t+1=0$의 1이 아닌 서로 다른 근 2개로 총 3개이므로 $f(t)=3$이고,

$t=2$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=-1$과 $x=1$의 2개이므로 $f(t)=2$이다.

$t>2$일 때 x에 대한 방정식 $(x-1)\times(x^2-t+1)=0$의 실근은 $x=1$과, $x^2-t+1=0$의 서로 다른 1이 아닌 근 2개로 총 3개이므로 $f(t)=3$이다.



step2

$|f(t)-b|$의 불연속점이 최대 1개여야 $(t-a)\times|f(t)-b|$가 연속일 수 있다.

$f(t)$가 $t=t_1$에서 불연속인데 $|f(t)-b|$는 $t=t_1$에서 연속이려면, $t=t_1$에서 $f(t)$의 좌극한, 우극한, 함숫값 중 2개 값이 같아야한다.

즉, $t_1=2$이므로 $|f(t)-b|$는 $t=2$에서 연속이고, $|2-b|=|3-b|$여야 하므로 $b=\frac{5}{2}$이다.

또한 $t=1$에서 $(t-a)\times|f(t)-b|$가 연속이어야 하므로,

$t=1$에서 $t-a=0$이고 $a=1$이다.

그러므로 $a+b=\frac{7}{2}$이다.

여담:

1. $x=1$ 조심하며 $f(t)$의 그래프 파악하기.

2. 곱함수의 연속성 이용하기.

실수 전체의 집합에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하며, $x=a$에서 연속이 아닌 함수 $f(x)$와, 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 있을 때, 함수 $y=f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이라면 $g(a)=0$이다.

3. $f(x)$가 $x=x_1$에서 불연속인데 $|f(x)-b|$는 $x=t_1$에서 연속이려면, $x=t_1$에서 $f(x)$의 좌극한, 우극한, 함숫값 중 2개 값이 같아야한다.

0이상의 상수 p에 대하여
$|$좌극한$-b|=|$우극한$-b|=|$함숫값$-b|=p$여야 하는데,

이때 좌극한$=b+p$ 또는 $b-p$, 우극한$=b+p$ 또는 $b-p$, 함숫값$=b+p$ 또는 $b-p$ 이므로 좌극한, 우극한, 함숫값 중 최소 2개의 값이 같다.

또한 $f(x)$는 $x=x_1$에서 불연속이므로 3개 값이 다 같을 수는 없다.

($p=0$일 경우, 좌극한=우극한=함숫값=b이므로 $f(x)$는 $x=x_1$에서 연속이다.)

13.

정답: ③

해설:

선분 BC를 긋고, 주어진 원의 반지름을 r이라 하면,

$r=\sqrt{19}$이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면

$2r\times\sin\angle\mathrm{ACB}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2r}=\frac{8}{2\sqrt{19}}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$이다.

또한 $\cos\angle\mathrm{BDC}=-\frac{1}{7}$이므로 $\cos\angle\mathrm{BDA}=\frac{1}{7}$,

$\sin\angle\mathrm{BDC}=\sqrt{1-(\cos\angle\mathrm{BDC})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BC}}=\sin\angle\mathrm{BCD}:\sin\angle\mathrm{BDC}=7:\sqrt{57}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=7t$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{57}t$라 할 수 있다. (단, $t>0$)

삼각형 BCD에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{\mathrm{BC}})^2=(\overline{\mathrm{BD}})^2+(\overline{\mathrm{CD}})^2-2\times(\overline{\mathrm{BD}})\times(\overline{\mathrm{CD}})\times\cos\angle\mathrm{BDC}$이므로

$57t^2=49t^2+2^2-2\times7t\times2\times\left(-\frac{1}{7}\right)$이고, 정리하면

$2t^2-t-1=0$이고 $t=1$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=7$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{57}$이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 적용하면,

$(\overline{\mathrm{AB}})^2=(\overline{\mathrm{AD}})^2+(\overline{\mathrm{BD}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AD}})\times(\overline{\mathrm{BD}})\times\cos\angle\mathrm{BDA}$이므로,

$(\overline{\mathrm{AD}})^2+7^2-2\times(\overline{\mathrm{AD}})\times7\times\frac{1}{7}=8^2$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=5$이다.

또한 $\cos\angle\mathrm{ADB}=\frac{1}{7}$ 이므로

$\sin\angle\mathrm{ADB}=\sqrt{1-(\cos\angle\mathrm{ADB})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$이고,

따라서

$[\triangle\mathrm{ABD}]=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\sin\angle\mathrm{ADB}=\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$

이다.

여담:

사인법칙에 의해,

삼각형 ABC에서 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$이다.

(단, 각 A의 마주보는 변은 a, 각 B의 마주보는 변은 b, 각 C의 마주보는 변은 c이다.)

14.

정답: ⑤

해설:

ㄱ.

다항함수 $f'(x)$는 이차함수이므로 $f'(x)=2$의 서로 다른 실근은 최대 2개 존재한다.

평균값정리에 의해

$(1,2)$에서 $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=2=f'(x_1)$인 x_1이 존재하고,

$(2,3)$에서 $\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=f'(c)<-2$인 c가 존재한다.

또한 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 다항함수 $f'(x)$에 대해 사잇값 정리를 적용하면,

(c,∞)에 $f'(x_2)=2$인 x_2가 존재한다는 점을 알 수 있다.

따라서 열린구간 $(1,\infty)$에서 방정식 $f'(x)=2$의 서로 다른 실근은 2개 존재하고, ㄱ은 참이다.

ㄴ.

ㄱ을 통해 $f'(x)$의 최솟값은 -2보다 작다는 점을 알 수 있다.

ㄱ에서 확인했듯이 $f'(x)=2$를 만족시키는 $x=x_1$, $x=x_2$는 $(1,\infty)$에 존재한다.

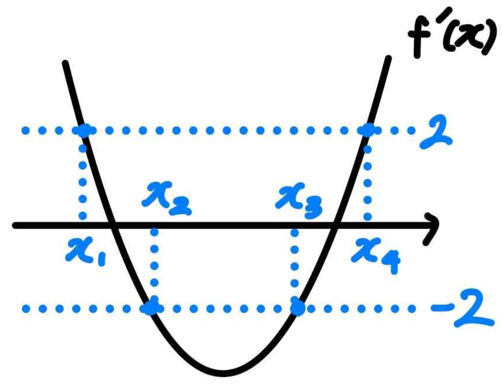
또한 $f'(x)$의 최솟값은 -2보다 작으므로, $f'(x)=-2$를 만족시키는 서로 다른 실근은 $x=x_3$, $x=x_4$의 2개이다.

(단, $x_3<x_4$)

$f'(x_1)=f'(x_2)=2$이고, $f'\left(\dfrac{x_3+x_4}{2}\right)<-2$이므로, $f'(x)$에 대해 사잇값 정리를 적용하면

$\left(x_1,\dfrac{x_3+x_4}{2}\right)$에서 $f'(x_3)=-2$인 x_3이 존재하고,

$\left(\dfrac{x_3+x_4}{2},x_2\right)$에서 $f'(x_4)=-2$인 x_4가 존재한다.



(그래프로 보면 좀 더 직관적으로 확인 가능하다.)

그러므로 $(1, \infty)$에서 $|f'(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 x_1, x_2, x_3, x_4의 4개이다.

따라서 ㄴ은 참이다.

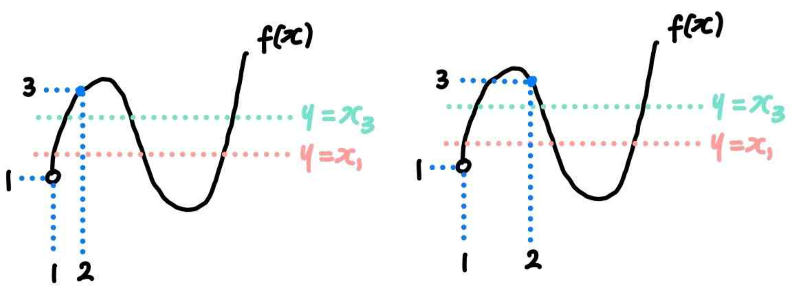
ㄷ.

$|f'(x)|=2$의 모든 실근은 $x=x_1$, x_2, x_3, x_4이므로,

구간 $(1, \infty)$에서 $f(x)=x_1$, x_2, x_3, x_4의 실근의 개수를 세어보자.

이때 ㄱ에서 확인했듯이 $1<x_1<2$이고, 또한 $2<c<3$이므로 $1<x_1<x_3<3$이다.

그러므로 $f(x)=x_1$과 $f(x)=x_3$의 서로 다른 근은 각각 3개씩 나온다.



(그림: $x=1$과 $x=2$의 위치에 따른 가능한 상황. 어느 경우든 $f(x)=x_1$과 $f(x)=x_3$의 서로 다른 근은 각각 3개씩 나온다.)

또한 $x_3<x_4<x_2$이므로, $f(x)=x_4$와 $f(x)=x_2$의 근은 최소 1개씩 존재한다.

따라서 $|f'(f(x))|=2$의 서로 다른 실근의 개수는 최소 $3+3+1+1=8$개이므로 ㄷ은 참이다.

($f(x)=x_4$와 $f(x)=x_2$의 실근의 개수에 따라 8보다 큰 수도 가능하다.)

여담:

수2 ㄱㄴㄷ 문제에서 $f'(x)$가 등장했을 때,

제일 먼저 평균값정리를 고려해보아야 하고,

그래도 안 풀리면 도함수의 사잇값 정리도 고려해야 하는 경우가 있다. (도함수의 사잇값 정리: $f'(x)$에 사잇값 정리 사용)

15.

정답: ④

해설:

step1 (가) 조건 해석

만약 $a_n \ge 0$이라면, $a_{n+3}=2a_n-3$이고,

$a_n \ge \frac{3}{2}$인 경우 $a_{n+6}=4a_n-9$이고

$0 \le a_n < \frac{3}{2}$인 경우 $a_{n+6}=-4a_n+3$이다.

이때 $a_n=a_{n+6}$이므로,

$a_n \ge \frac{3}{2}$일 경우 $4a_n-9=a_n$이므로 $a_n=3$이며,

$0 \le a_n < \frac{3}{2}$일 경우 $-4a_n+3=a_n$이므로 $a_n=\frac{3}{5}$이다.

또한 $a_n<0$이라면, $a_{n+3}=-2a_n-3$이고,

$-\frac{3}{2}<a_n<0$인 경우 $a_{n+6}=4a_n+3$이고

$a_n \le -\frac{3}{2}$인 경우 $a_{n+6}=-4a_n-9$이다.

이때 $a_n=a_{n+6}$이므로,

$-\frac{3}{2}<a_n<0$일 경우 $4a_n+3=a_n$이므로 $a_n=-1$이며,

$a_n \le -\frac{3}{2}$일 경우 $-4a_n-9=a_n$이므로 $a_n=-\frac{9}{5}$이다.

따라서 가능한 a_n의 값은 3, $\frac{3}{5}$, -1, $-\frac{9}{5}$이다.

step2 (나) 조건 해석

$a_1=3$이라면 $a_4=2a_1-3=3$이고, $a_1=a_4$가 되므로 $a_1 \ne 3$이다.

$a_1=\frac{3}{5}$이라면 $a_4=2a_1-3=-\frac{9}{5}$이고, $a_1>a_4$가 되므로

$a_1 \ne \frac{3}{5}$이다.

$a_1=-1$이라면 $a_4=-2a_1-3=-1$이고, $a_1=a_4$가 되므로

$a_1 \ne -1$이다.

$a_1=-\frac{9}{5}$라면 $a_4=-2a_1-3=\frac{3}{5}$이므로 가능한 a_1의 값은

$a_1=-\frac{9}{5}$뿐이다.

step3

$a_1=-\frac{9}{5}$, $a_4=\frac{3}{5}$이므로 $a_1<a_2<a_4$인 $a_2=-1$이며

$a_5=-1$이다.

$a_3>a_4$이므로 $a_3=3$, $a_6=3$이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{35} a_k=(a_1+a_4+\cdots+a_{34})+(a_2+a_5+\cdots+a_{35})+(a_3+a_6+\cdots+a_{33})$$

$$=\left(-\frac{9}{5}+\frac{3}{5}\right)\times 6+(-1)\times 12+3\times 11$$

$=\frac{69}{5}$이다.

여담:

(가) 조건을 통해 가능한 a_n의 값 파악하는 과정에 주목하자.

20.

정답: 32

해설:

step1 $F(x)$, $f(x)$, $f'(x)$ 설정하기

$f(x)$는 이차함수이므로 $F(x)$는 삼차함수이고,

$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 할 수 있다. (단, $a\neq0$)

x에 대해 미분하면,

$f(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(x)=6ax+2b$이다.

step2

$f(0)F(x)=c\times(ax^3+bx^2+cx+d)=acx^3+bcx^2+c^2x+cd$

$x^2f'(x)=6ax^3+2bx^2$

$f(2)x=(12a+4b+c)x$

$F(0)=d$

step3

모든 실수 x에 대하여

$acx^3+bcx^2+c^2x+cd=6ax^3+2bx^2+(12a+4b+c)x+d$ 이므로,

$ac=6a$, $bc=2b$, $c^2=12a+4b+c$, $cd=d$이다.

이때 $a\neq0$이므로 $c=6$이고,

$bc=6b=2b$이므로 $b=0$이며,

$c^2=12a+4b+c$이므로 $a=\dfrac{5}{2}$이고,

$cd=6d=d$이므로 $d=0$이다.

그러므로

$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d=\dfrac{5}{2}x^3+6x$이고,

$F(2)=\dfrac{5}{2}\times2^3+6\times2=32$이다.

여담:

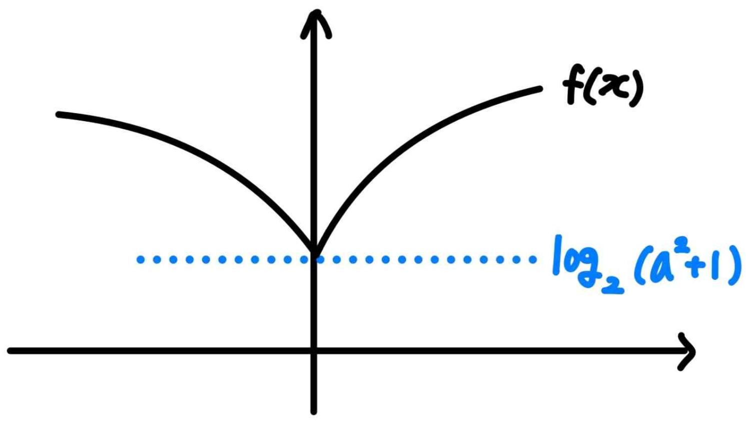
구해야 하는 값도 $F(2)$의 값이므로, $f(x)=ax^2+bx+c$로 설정하는 것보다 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$로 설정하는 게 더 편하다.

21.

정답: 18

해설:

step1



t^2+1은 양수이고, $t^2-|t|+1=(|t|-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

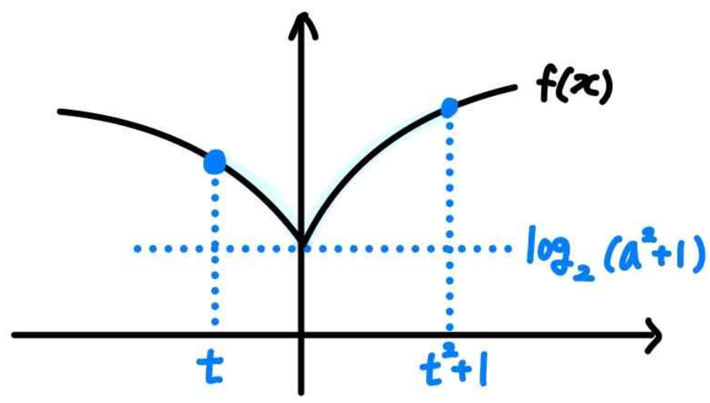
$|t|<t^2+1$이다.

step2

1) $t\leq0$인 경우

$t\leq0$이라면 닫힌구간 $[t,t^2+1]$에서 최솟값은
$f(0)=\log_2(a^2+1)$이고,

$|t|<t^2+1$이므로 닫힌구간 $[t,t^2+1]$에서 최댓값은
$f(t^2+1)=\log_2(t^2+1+a^2+1)$이다.



이때 최댓값과 최솟값의 차이가 1이므로,

$f(t^2+1)-f(0)$

$=\log_2(t^2+1+a^2+1)-\log_2(a^2+1)=\log_2\left(\dfrac{t^2+1}{a^2+1}+1\right)=1$이고,

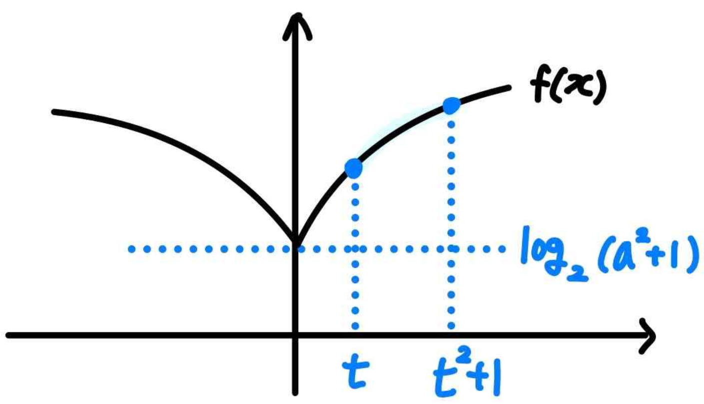
정리하면 $t=-a$이다.

2) $t>0$인 경우

$t>0$이라면 닫힌구간 $[t,t^2+1]$에서 최솟값은

$f(t)=\log_2(t+a^2+1)$이고,

닫힌구간 $[t, t^2+1]$에서 최댓값은
$f(t^2+1)=\log_2(t^2+1+a^2+1)$이다.



이때 최댓값과 최솟값의 차이가 1이므로,

$f(t^2+1)-f(t)=\log_2(t^2+1+a^2+1)-\log_2(t+a^2+1)=1$이고,

정리하면 $t^2-2t-a^2=0$이므로

양수인 t는 $t=1+\sqrt{a^2+1}$이다.

step3

모든 실수 t의 값의 합은

$1+\sqrt{a^2+1}+(-a)=\frac{3}{2}$이므로

$a^2+1=(a+\frac{1}{2})^2$이고, 이를 만족시키는 a는 $a=\frac{3}{4}$이다.

그러므로 $24a$의 값은 18이다.

여담:

1. $t \le 0$일 때와 $t>0$일 때 $[t, t^2+1]$에서 최솟값이 다른 식으로 나온다.

2. $|t|<t^2+1$이기 때문에 $t \le 0$일 때와 $t>0$일 때 $[t, t^2+1]$에서 최댓값이 같은 식으로 나온다.

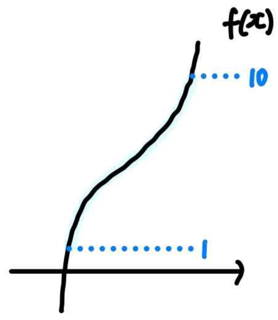
22.

정답: 259

해설:

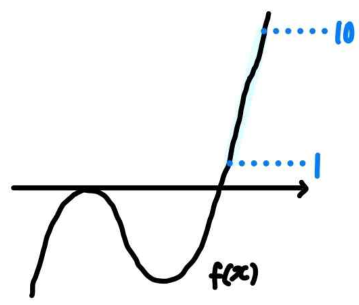
step1

만약 $f(x)$가 증가만 하는 개형이라면, $f(x)$의 값이 10이하의 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 10개이다.



그러므로 $f(x)$는 극대 극소를 가지는 개형이다.

또한 $f(x)$의 극댓값이 0 이하의 값이라면, $f(x)$의 치역이 0보다 큰 구간에서 $f(x)$는 일대일대응이므로, $f(x)$의 값이 10이하의 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 10개이다.



10이하의 자연수 n에 대하여, $f(x)=n$의 서로 다른 실근이 1개인 n의 개수를 p, $f(x)=n$의 실근이 3개인 n의 개수를 q라 하자.

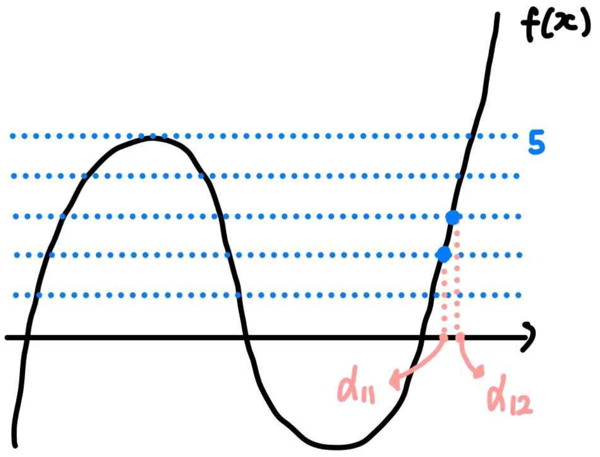
(단, n은 자연수, p, q는 0 이상의 정수, $n \le 10$, $p \le 10$, $q \le 10$)

$f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 존재하지 않는다면, $p+q=10$이고, $p+3q=19$이므로 $p=\frac{11}{2}$, $q=\frac{9}{2}$이며, 이는 p와 q가 0 이상의 정수라는 조건에 모순이다.

따라서 $f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 존재하고, $p+q=9$이며, $p+3q+2=19$이므로 $p=5$, $q=4$이다.

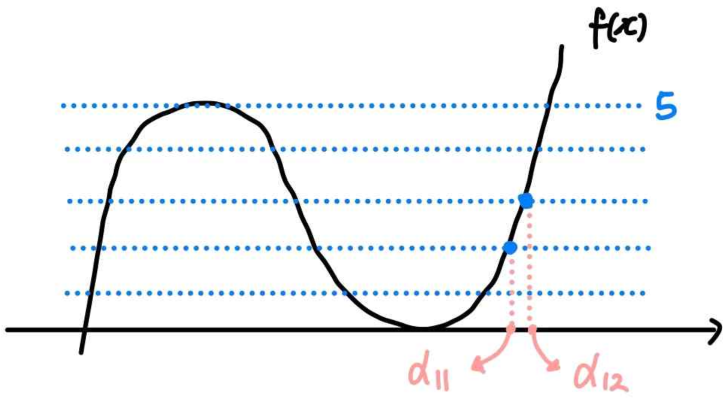
step2

1) $f(x)$의 실근이 3개인 경우



이 경우 $f'(\alpha_{11})>0$, $f'(\alpha_{12})>0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

2) $f(x)$의 실근이 2개인 경우



이 경우 $f'(\alpha_{11})>0$, $f'(\alpha_{12})>0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

3) $f(x)$의 실근이 1개인 경우

p와 q의 값이 정해져 있으므로 $f(x)$가 극댓값을 가지는 x는 아무리 커봤자 α_{10}과 α_{11} 사이의 값이고, 그러므로 $f(x)$의 극솟값이 정수라면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})\geq 0$이므로 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$을 만족하지 않는다.

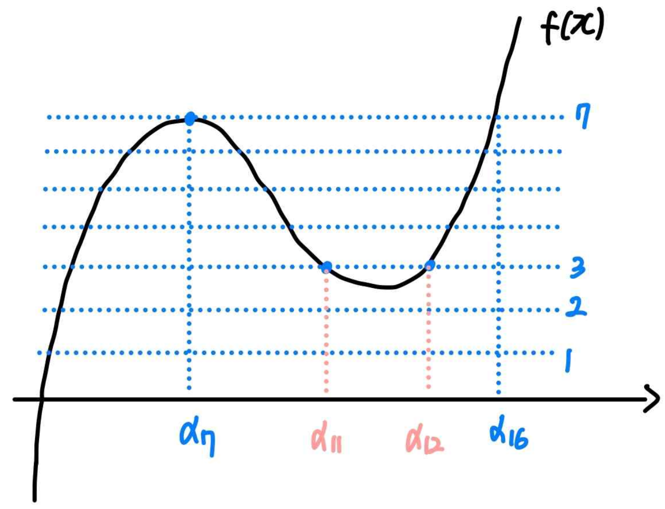
($x=\alpha_{11}$과 $x=\alpha_{12}$에서 극솟값을 안 가진다면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})>0$이고, 둘 중 하나에서 극솟값을 가진다면 $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})=0$이다.)

따라서 $f(x)$의 극댓값이 정수이며, $f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$이려면 $f'(\alpha_{11})<0$, $f'(\alpha_{12})>0$이어야 한다.

이를 만족시키는 $f(x)$의 극솟값은, $2<(\text{극솟값})<3$이어야한다.

($f(x)\leq(f(x)$의 극댓값)에서 $f(x)=n$의 실근이 2개인 n이 1개, $f(x)=n$의 실근이 3개인 n이 4개 존재하므로 $f(x)=n$의 실근이 1개인 n이 2개 존재하면, $1\times2+2\times4+1=11$이다.

아래 그림참고)



step3

$f(x)=2(x-\alpha_7)^2(x-\alpha_{16})=2(x-\alpha_7)^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$라 하면,

$2<7-\dfrac{4}{27}\left(\dfrac{3}{2}-\alpha_7\right)^3<3$이므로 $\dfrac{27}{2}<\left(\dfrac{3}{2}-\alpha_7\right)^3<\dfrac{135}{8}$이고,

이를 만족시키는 $\alpha_7=-1$이다.

따라서 $f(x)=2(x+1)^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+7$이므로 $f(5)=259$이다.

여담:

$f(x)=n$의 실근이 1개인 10이하의 자연수 n의 개수,

$f'(\alpha_{11})\times f'(\alpha_{12})<0$ 조건은 눈으로도 파악 가능하기 때문에, $f(x)=n$의 실근이 3개인 10이하의 자연수 n의 개수를 먼저 파악했으면, 많은 경우를 살펴보지 않아도 답을 구할 수 있었을 것이다.

기출 다시보기: 2019학년도 수능 가형 30번(미적분 선택자만)

14. 최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.

(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \dfrac{\pi}{2}$이다.) [4점]

정답: 27

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.