2025학년도 대학수학능력시험 대비

설레임 9월 모의고사 정답 및 해설

· 수학 영역 ·

1	②	**2**	④	**3**	④	**4**	③	**5**	②
6	⑤	**7**	①	**8**	④	**9**	①	**10**	②
11	⑤	**12**	③	**13**	②	**14**	③	**15**	①
16	45	**17**	35	**18**	10	**19**	45	**20**	91
21	39	**22**	220						

예상 컷 (감점 기준)

1등급	0 ~ 8
2등급	9 ~ 14
3등급	15 ~ 20

※ 미적 기준이며, 확통은 4점씩 빼기!

슬쩍 공지 때리기

드디어 **설레임 모의고사**가 판매를 시작했습니다!
이것보다 훨씬 많은 인력이 갈아넣어졌기에..
이 모의고사가 괜찮았다면 후회하지 않을 거에여:)

해 설

1. 정답 ②

$\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^{-6}=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{-6}$
$=2^2$
$=4$

2. 정답 ④

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-7}{h}=f'(2)$

이므로 $f'(x)=3x^2-4x$ 에서 $f'(2)=4$

3. 정답 ④

$\tan(\theta+3\pi)=\tan\theta$ 이므로 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$ 이고,

$0<\theta<\pi$ 에서 $\tan\theta>0$ 이려면

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

4. 정답 ③

$\displaystyle\int_0^2(x^2-2x+3)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^2=\frac{14}{3}$

5. 정답 ②

$x\neq1$ 일 때, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$=\dfrac{1}{2}$

6. 정답 ⑤

구하는 점의 y 좌표가 자연수이려면 양수이면서 정수여야 한다.

$17-2^{6-x}>0$

$2^{6-x}<17$

x 가 자연수이므로 $x\geq2$

$17-2^{6-x}$ 가 정수이려면 $6-x\geq0$ 이므로 $x\leq6$

따라서 $2\leq x\leq6$ 을 만족시키는 자연수 x 는

2, 3, 4, 5, 6의 5개

7. 정답 ①

주어진 식의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$S_1-a_1=9+p$ 인데,

$S_1=a_1$ 이므로 $9+p=0$

곧, $p=-9$

$n\geq2$ 이면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(S_k-a_k)=3n^2+6n-9$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(S_k-a_k)=3(n-1)^2+6(n-1)-9$

에서 위의 두 식을 변변끼리 빼면

$S_n-a_n=6n+3$

$S_{n-1}=6n+3$ ($\because$ $n\geq2$)

곧, $S_5=39$, $S_4=33$ 이므로 $a_5=S_5-S_4=6$

따라서 구하는 값은

$p+a_5=(-9)+6=-3$

8. 정답 ④

$f'(x)=3x^2-3x-6$
$=3(x+1)(x-2)$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고, $x=2$ 에서 극소이다.

곧, 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,f(-1))$, $(2,f(2))$ 에서 접선의 기울기가 모두 0이므로 두 점 P, Q의 x 좌표는 각각 -1, 2이거나 각각 2, -1 이다.

곧, $f(-1)=3$ 또는 $f(2)=3$

(i) $f(-1)=3$ 이면

$-1-\dfrac{3}{2}+6+a=3$, $a=-\dfrac{1}{2}$

(ii) $f(2)=3$ 이면

$8-6-12+a=3$, $a=13$

따라서 $a>0$ 이므로 $a=13$ 이고,

점 P, Q의 x 좌표는 각각 2, -1 이다.

곧, $b=f(-1)=-1-\dfrac{3}{2}+6+a=\dfrac{33}{2}$ 이므로

$a+b=13+\dfrac{33}{2}=\dfrac{59}{2}$

9. 정답 ①

a 가 양수이므로 a 의 m 제곱근 중 음수인 것이 존재하려면 m 은 짝수여야 한다.

$a=2^2$, 2^4, 2^6, 2^8, $\cdots$ ...... ㉠

한편, a 가 2^{12} 의 n 제곱근이며, 양수이므로

$a=2^{\frac{12}{n}}$ 으로 나타낼 수 있다.

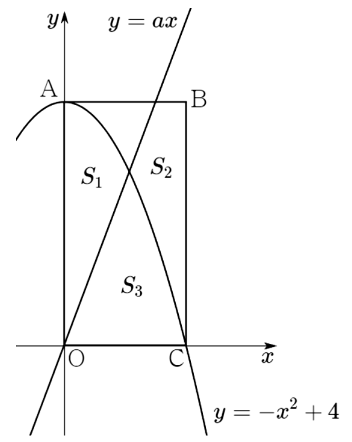
이러한 a 가 ㉠에 속하려면 $\dfrac{12}{n}$ 이 짝수이고,

(a,m,n) 으로 가능한 모든 순서쌍은

$(2^2,2,6)$, $(2^4,4,3)$, $(2^6,6,2)$ 의 3개

10. 정답 ②

곡선 $y=-x^2+4$, 직선 $y=ax$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.



$S_1-S_2=(S_1+S_3)-(S_2+S_3)=\dfrac{1}{3}$

에서

$S_1+S_3=\displaystyle\int_0^2(-x^2+4)dx$

$=\left[-\dfrac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$

$=-\dfrac{8}{3}+8$

$=\dfrac{16}{3}$

이므로 $S_1-S_2=\dfrac{1}{3}$ 이려면 $S_2+S_3=5$

직선 $y=ax$ 와 선분 AB가 만나는 점을 P라 할 때, S_2+S_3 의 값은 사다리꼴 OPBC의 넓이와 같다.

$\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{PB}}+2)\times4=5$, $\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{1}{2}$

곧, $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},4\right)$ 이므로 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{4}{\frac{3}{2}}=\dfrac{8}{3}$

따라서 $a=\dfrac{8}{3}$

11. 정답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭임에 주목하자.

$\displaystyle\int_0^1f(t)dt=\int_1^2f(t)dt=k$ 라 할 때,

주어진 방정식은

$\left(\displaystyle\int_1^xf(t)dt+k\right)\left(\int_1^xf(t)dt-k\right)$

$=\left(\displaystyle\int_1^xf(t)dt\right)^2-k^2$

$=0$

곧, 방정식 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=\pm k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이다.

한편, $\displaystyle\int_0^2f(x)dx=2k=-6$ 이므로 $k=-3$ 이고,

방정식 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=\pm3$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4임을 얻는다.

대칭성에 의해 $x=1+\alpha$ 에서 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=3$ 이면

$x=1-\alpha$ 에서 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=-3$ 이고,

반대로 $x=1+\alpha$ 에서 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=-3$ 이면

$x=1-\alpha$ 에서 $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=3$ 이다.

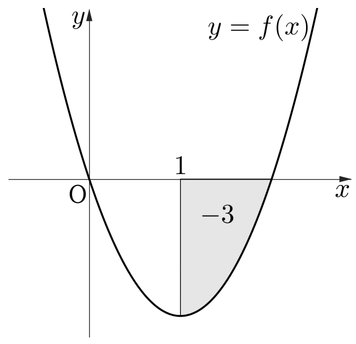
이를 이용하면 $x>1$ 에서 두 방정식

$\displaystyle\int_1^xf(t)dt=3$, $\displaystyle\int_1^xf(t)dt=-3$

의 실근의 개수의 합이 2임을 알 수 있다.

이를 만족시키려면 그림과 같이

$\int_1^x f(t)dt=-3$일 때, $f(x)=0$이어야 한다.



이때, $\int_1^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=-3$이므로

$f(2)=0$임을 알 수 있다.

따라서 $f(2)=a+b=0$을 얻고,

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2\{a(t-1)^2+b\}dt$$
$$=\left[\frac{a}{3}(t-1)^3+bt\right]_0^2$$
$$=\frac{2}{3}a+2b$$

이므로 $\frac{2}{3}a+2b=-6$

두 식을 연립하면 $a=\frac{9}{2}$, $b=-\frac{9}{2}$이므로

$a^2+b^2=\frac{81}{2}$

12. 정답 ③

주어진 식은

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)+a_{n+1}-a_1=a_{n+1}+17$

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+|a_k|)=a_1+17$ …… ㉠

으로 고쳐 쓸 수 있다.

만일 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이면

$\{a_n\}$의 공차가 자연수이므로 수열 $\{a_n+|a_n|\}$의 모든 항이 양수이고, ㉠의 좌변에 있는 식은 n이 증가함에 따라 증가한다.

그러면 ㉠의 우변이 상수이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n은 최대 한 개까지만 존재할 수 있다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 0 또는 음수이다.

수열 $\{a_n+|a_n|\}$은

$a_n\le 0$일 때 $a_n+|a_n|=0$

$a_n>0$일 때 $a_n+|a_n|=2a_n$

이므로 ㉠의 좌변은 0이 계속해서 나타나다가 처음으로 $a_n>0$이 되는 순간부터 계속 증가한다.

곧, ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 5이려면 ㉠의 우변이 0이어야 한다.

$a_1+17=0$, $a_1=-17$

㉠을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은

$a_n\le 0$인 n의 최댓값과 같다.

곧, ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 5이면

$a_n\le 0$인 n의 최댓값이 5이다.

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=-17+4d\le 0$

$a_6=-17+5d>0$

곧, $\frac{17}{5}<d\le\frac{17}{4}$이고, d가 자연수이므로 $d=4$

$a_9=-17+8\times4=15$

13. 정답 ②

점 P가 $t=k\,(k>0)$일 때 점 $\mathrm{A}(x(3))$을 지나면서 운동 방향이 바뀐다고 가정하자.

(ⅰ) $k=3$인 경우

점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도는

$x'(t)=3t^2-2at+(6a-11)$

이므로

$x'(3)=27-6a+6a-11=16$

곧, 점 P의 시각 $t=3$에서의 속도가 0이 아니므로 점 P는 시각 $t=3$에서 운동 방향을 바꾸지 않는다.

(ⅱ) $k\ne 3$인 경우

점 P가 시각 $t=k\,(k>0)$일 때 점 $\mathrm{A}(x(3))$을 지나므로 $x(k)=x(3)$

점 P가 시각 $t=k$에서 운동 방향을 바꾸므로

$x'(k)=0$

따라서 상수 p에 대하여

$x(t)=(t-3)(t-k)^2+p$ …… ㉠

로 둘 수 있다.

주어진 $x(t)$의 식에서 $x'(3)=16$인데,

㉠에서 $x'(3)=(3-k)^2$이므로

$(3-k)^2=16$

$k=-1$ 또는 $k=7$

이때, $k>0$이므로 $k=7$

$x(t)=(t-3)(t-7)^2+p$

주어진 $x(t)$의 식에서 상수항이 -17이므로

위의 식과 상수항을 비교하면 $p=130$

이상에서 $x(t)=(t-3)(t-7)^2+130$이므로

점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는

$v(t)=(t-7)^2+2(t-3)(t-7)$

$v(8)=1^2+2\times5\times1=11$

14. 정답 ③

모든 양수 x에 대하여

$-1\le\sin\{\pi f(x)\}\le 1$, $-1\le\cos\frac{12\pi}{x}\le 1$

이므로 $-1\le g(x)\le 1$이다.

따라서 $g(k+4)=g(k)+2$이려면

$g(k+4)=1$, $g(k)=-1$

이어야 한다.

곧, $\cos\frac{12\pi}{k+4}$, $\cos\frac{12\pi}{k}$의 값이 1 또는 -1이어야 하므로 $\frac{12}{k+4}$, $\frac{12}{k}$의 값이 모두 정수여야 한다.

$k>0$이므로 $k+4>4$이기 때문에 $\frac{12}{k+4}<3$

따라서 $\frac{12}{k+4}$로 가능한 정수는 1, 2이다.

$\frac{12}{k+4}=1$인 경우, $k=8$이고 이때 $\frac{12}{k}\left(=\frac{3}{2}\right)$이 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\frac{12}{k+4}=2$인 경우, $k=2$이고 이때 $\frac{12}{k}(=6)$이 정수가 되어 조건을 만족시킨다.

따라서 $g(6)=1$, $g(2)=-1$이며

$g(6)=\sin\{\pi f(6)\}$, $g(2)=\sin\{\pi f(2)\}$

이므로 $g(6)=g(2)+2$이려면

$\sin\{\pi f(6)\}=1$, $\sin\{\pi f(2)\}=-1$

곧, 정수 m, n에 대하여

$f(6)=2m+\frac{1}{2}$, $f(2)=2n+\frac{3}{2}$

이므로

$$f(k)\times f(k+4)=f(2)\times f(6)$$
$$=\left(2n+\frac{3}{2}\right)\left(2m+\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}$$

에서

$(4n+3)(4m+1)=-1$

$4n+3=-1$, $4m+1=1$이거나

$4n+3=1$, $4m+1=-1$이다.

m, n이 정수이므로

$m=0$, $n=-1$

따라서 $f(6)=\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 두면

$$\begin{cases}36+6a+b=\frac{1}{2}\\4+2a+b=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $a=-\frac{31}{4}$, $b=11$

$f(x)=x^2-\frac{31}{4}x+11$

$f(8)=64-62+11=13$

15. 정답 ①

실수 t에 대하여

$\lim_{h\to0+}\frac{h}{|g(t-h)|+2|g(t+h)|}$의 값은

$g(t)\ne 0$일 때 0이고,

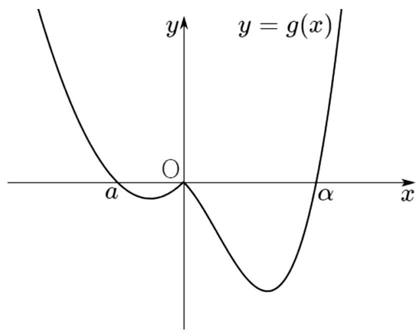
$g(t)=0$일 때

$$\frac{1}{\lim_{h\to0+}\frac{|g(t-h)|+2|g(t+h)|}{h}}$$

의 값인데, 함수 $y=|g(x)|$의 $x=t$에서의 좌미분계수를 L, 우미분계수를 R이라 하면

$$\frac{1}{\lim_{h\to0+}\frac{|g(t-h)|+2|g(t+h)|}{h}}=\frac{1}{2R-L}$$ …… ㉠

한편, $f'(0)<0$이고, $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수임을 고려하여 그린 곡선 $y=g(x)$의 개형은 다음과 같다.



한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위하여 $g(0)=0$이다.

$g(t)=0$이 되도록 하는 모든 t의 값은

a, 0, ($y=f(x)$의 x절편 중 양수인 것)

이다.

$t=a$일 때, ㉠에서 $R=-a$, $L=a$이므로

$\frac{1}{2R-L}=\frac{1}{-3a}$ …… ㉡

$t=0$일 때, ㉠에서 $R=-f'(0)$, $L=a$이므로

$\frac{1}{2R-L}=\frac{1}{-2f'(0)-a}$

(ⅰ) ㉡의 값이 $\frac{1}{15}$인 경우

$a=-5$이고,

$\frac{1}{-2f'(0)-a}=\frac{1}{15}$ 또는 $\frac{1}{3}$

이므로

$-2f'(0)+5=15$ 또는 $-2f'(0)+5=3$

이때, $f'(0)<0$이므로 $f'(0)=-5$

$t=a$, $t=0$인 경우 모두 ㉠의 값이 $\frac{1}{15}$이므로

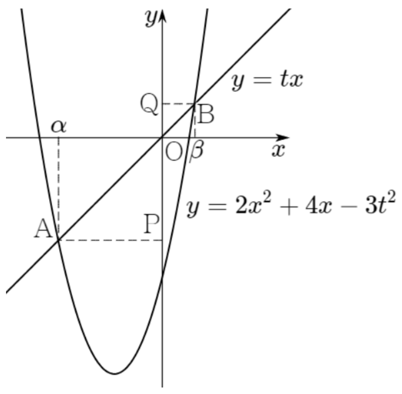
함수 $y=f(x)$의 x절편 중 양수인 것을

$\alpha\ (\alpha > 0)$ 이라 할 때,
주어진 조건을 만족시키려면 $t=\alpha$ 일 때 ㉠의 값이 $\frac{1}{3}$ 이어야 한다.
$t=\alpha$ 일 때,
$f'(0)=-5$, $f(0)=f(\alpha)=0$
임을 이용하여 $f(x)$ 의 식을 세우면
$f(x)=x(x-\alpha)\left(x+\frac{5}{\alpha}\right)$
$t=\alpha$ 일 때 ㉠의 값이 $\frac{1}{3}$ 이 되기 위해
$f'(\alpha)=1$ 이어야 한다.
$f'(\alpha)=\alpha\left(\alpha+\frac{5}{\alpha}\right)=1$
$\alpha^2+5=1$
이 방정식을 만족시키는 α 가 존재하지 않는다.
(ii) ㉡의 값이 $\frac{1}{3}$ 인 경우
$a=-1$ 이고,
$\frac{1}{-2f'(0)-a}=\frac{1}{15}$ 또는 $\frac{1}{3}$
$-2f'(0)+1=15$ 또는 $-2f'(0)+1=3$
곧, $f'(0)=-7$ 또는 $f'(0)=-1$
(ii-1) $f'(0)=-7$ 인 경우
함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 x 절편 중 양수인 것을 $\alpha\ (\alpha>0)$ 이라 할 때,
$f(x)=x(x-\alpha)\left(x+\frac{7}{\alpha}\right)$
으로 식을 세울 수 있고,
$f'(\alpha)=\alpha\left(\alpha+\frac{7}{\alpha}\right)=\alpha^2+7$ ...... ㉢
$t=\alpha$ 일 때, ㉠의 값이 $\frac{1}{3f'(\alpha)}$ 이고, 이 값이 $\frac{1}{15}$ 또는 $\frac{1}{3}$ 이므로 $f'(\alpha)=5$ 또는 $f'(\alpha)=1$
두 경우 모두 ㉢을 만족시키는 실수 α 가 존재하지 않는다.
(ii-2) $f'(0)=-1$ 인 경우
함수 $y=f(x)$ 의 x 절편 중 양수인 것을 $\alpha\ (\alpha>0)$ 이라 할 때,
$f(x)=x(x-\alpha)\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)$
으로 식을 세울 수 있고,
$t=a$, $t=0$ 일 때 모두 ㉠의 값이 $\frac{1}{3}$ 이므로
주어진 조건을 만족시키려면 $t=\alpha$ 일 때,
㉠의 값이 $\frac{1}{15}$ 이어야 한다.
곧, $\frac{1}{3f'(\alpha)}=\frac{1}{15}$ 에서 $f'(\alpha)=5$
$f'(\alpha)=\alpha\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=5$
$\alpha^2+1=5$
에서 $\alpha>0$ 이므로 $\alpha=2$
(i), (ii)에서 $\alpha=2$ 이고,
$f(x)=x(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 이므로
$f(3)=3\times 1\times\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$

16. 정답 45
함수 $y=7+2\cos x$ 의 최댓값은 $7+2=9$,
최솟값은 $7-2=5$ 이므로
$M\times m=9\times 5=45$

17. 정답 35
주어진 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
$0=1+2-5+k$, $k=2$
주어진 식의 양변을 미분하면
$f(x)=4x^3+4x-5$
따라서 $f(k)=f(2)=32+8-5=35$

18. 정답 10
주어진 로그들이 정의되기 위해
$0<x<1$ 또는 $x>1$ ...... ㉠
이고, 주어진 부등식을 다시 쓰면
$2\log_2 x-3\log_x 2\le 5$
$2\log_2 x-\frac{3}{\log_2 x}\le 5$
$\log_2 x=t$ 로 치환하면
$2t-\frac{3}{t}\le 5$
$2t^2-5t-3\le 0$
$(2t+1)(t-3)\le 0$
곧, $-\frac{1}{2}\le t\le 3$ 이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 8$
이 범위에 속한 정수 x 중 ㉠을 만족시키는 것은
$2, 3, \cdots, 8$
이므로 정수 x 의 최댓값은 8, 최솟값은 2 이고
그 합은 $8+2=10$

19. 정답 45


두 점 A, B 의 x 좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$ 라 하자.
이때, α 와 β 는 x 에 대한 방정식
$2x^2+4x-3t^2=tx$
곧, $2x^2+(4-t)x-3t^2=0$ 의 두 실근이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=(\beta-\alpha)\times\sqrt{t^2+1}$
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$
에서
$\beta-\alpha=\sqrt{(4-t)^2-4\times 2\times(-3t^2)}$
$=\frac{\sqrt{25t^2-8t+16}}{2}$
이므로
$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{PQ}})$
$=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{25t^2-8t+16}}{2}\times\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\right\}$
$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sqrt{25t^2-8t+16}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}\right)$
$=\frac{5}{4}$
따라서 $36k=36\times\frac{5}{4}=45$

20. 정답 91
$\sqrt{15}\cos B=\sin B$ 에서
$\cos B=\sin B=0$ 인 경우는 불가능하다.
곧, $\cos B\neq 0$ 이므로
$\sqrt{15}=\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B$
$0<\angle\mathrm{B}<\pi$ 이므로 $\sin B>0$ 이기 때문에
$\cos B>0$ 이다.
따라서 $\cos B=\frac{1}{4}$, $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$
조건 (가)에서 $\sin B=2\sin C$ 이므로
사인법칙에 의하여
$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=2$
곧, $\overline{\mathrm{AB}}=k\ (k>0)$ 으로 두면 $\overline{\mathrm{AC}}=2k$
조건 (나)에서 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 20π 이면 그 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로
사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2\sin B}=2\sqrt{5}$
$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}\times 2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=5\sqrt{3}$
곧, $k=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 이고,
$\angle\mathrm{B}$ 에 대한 코사인법칙에 의하여
$\frac{1}{4}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$
$=\frac{\mathrm{k}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-(2k)^2}{2\times k\times\overline{\mathrm{BC}}}$
$=\frac{\overline{\mathrm{BC}}^2-3k^2}{2k\overline{\mathrm{BC}}}$
$2\overline{\mathrm{BC}}^2-k\overline{\mathrm{BC}}-6k^2=0$
$(\overline{\mathrm{BC}}-2k)(2\overline{\mathrm{BC}}+3k)=0$
$k>0$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=2k$
따라서 삼각형 ABC 의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin B$
$=\frac{1}{2}\times k\times 2k\times\frac{\sqrt{15}}{4}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$
$=\frac{75}{16}\sqrt{15}$
따라서 $p=16$, $q=75$ 이고 $p+q=91$

21. 정답 39
조건 (가)에서
$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)g(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)G(x)}{x^n}\neq 0$
이려면 두 함수 $F(x)g(x)$, $f(x)G(x)$ 의 최고차항의 계수가 같아야 한다.
$f(x)$ 의 차수를 p, 최고차항의 계수를 a,
$g(x)$ 의 차수를 q, 최고차항의 계수를 b 라 하면
$F(x)g(x)$ 의 최고차항의 계수는 $\frac{ab}{p+1}$
$f(x)G(x)$ 의 최고차항의 계수는 $\frac{ab}{q+1}$
이므로
$\frac{ab}{p+1}=\frac{ab}{q+1}=-24$ ...... ㉠
에서 $p=q$
곧, $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 차수가 같다. ...... ㉡
조건 (나)에서 $xG(x)$ 는 $F(x)$ 보다 차수가 높다.
따라서 조건 (나)의 좌변과 우변이 같으려면

$xG(x)$ 의 최고차항이 $4x^3+12x^2+6$ 에 의해 소거되어야 한다.
다시 말해, $xG(x)=-4x^3+\cdots$ 의 형태로 나타내어진다.
그러면 $G(x)$ 는 최고차항의 계수가 -4 인 이차함수이므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -8 인 일차함수이다.
곧, ㉡에 의하여 $f(x)$ 도 일차함수이며,
㉠에 의하여
$\dfrac{a\times(-8)}{2}=-24$, $a=6$
한편, $f(0)=1$ 이므로 $f(x)=6x+1$
$F(x)=3x^2+x+C_1$
$G(x)=-4x^2+kx+C_2$
(단, k, C_1, C_2 는 상수)
위의 식을 조건 (나)의 식에 대입하면
$18x^2+6x+6C_1=(k+12)x^2+C_2x+6$
각 항의 계수를 비교하면
$k=6$, $C_1=1$, $C_2=6$
따라서
$F(x)=3x^2+x+1$, $G(x)=-4x^2+6x+6$
이므로 $F(3)+G(1)=31+8=39$

22. 정답 220
$a_3+a_4=0$ 이려면 $a_3\in S$ 인 경우과 $a_3\notin S$ 인 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) $a_3\in S$ 인 경우
$a_4=\sqrt{a_3}-2$ 이므로
$a_3+a_4=a_3+\sqrt{a_3}-2$
$=0$
이때, $\sqrt{a_3}=t\,(t>0)$ 으로 치환하면
$t^2+t-2=0$
$(t+2)(t-1)=0$
$t>0$ 이므로 $t=1$
곧, $a_3=1$ 이고 이는 ㉠의 가정을 만족시킨다.
(i-1) $a_2\in S$ 이면
$\sqrt{a_2}-1=1$ 에서 $a_2=4$
따라서
$a_1\in S$ 이면 $\sqrt{a_1}=4$ 이므로 $a_1=16$, 곧, $k=16$
$a_1\notin S$ 이면 $a_1+k=2k=4$ 이므로 $k=2$
(i-2) $a_2\notin S$ 이면
$a_2+k=1$ 에서 $a_2=1-k$
따라서
$a_1\in S$ 이면 $\sqrt{a_1}=1-k$ 이므로 $\sqrt{k}=1-k$
$k=(1-k)^2$
$k^2-3k+1=0$ 이므로 $k=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 인데,
이 경우 $a_1\notin S$ 이므로 불가능하다.
$a_1\notin S$ 이면 $a_1+k=1-k$ 이므로
$2k=1-k$ 에서 $k=\dfrac{1}{3}$
(ii) $a_3\notin S$ 인 경우
$a_3+a_4=2a_3+k=0$ 이므로 $a_3=-\dfrac{k}{2}$
(ii-1) $a_2\in S$ 이면
$a_3=\sqrt{a_2}-1$ 에서
$k>0$ 이기 때문에 $-\dfrac{k}{2}<0$ 이므로
$\sqrt{a_2}-1<0$, $0<a_2<1$
인데, 이를 만족시키면서 $a_2\in S$ 인 것이 불가능하다.
(ii-2) $a_2\notin S$ 이면
$a_2+k=-\dfrac{k}{2}$ 이므로 $a_2=-\dfrac{3}{2}k$
만일 $a_1\notin S$ 이면
$a_1+k=-\dfrac{3}{2}k$
에서 $a_1=-\dfrac{5}{2}k$ 이므로 $a_1=k$ 이려면
$k=0$ 이어야 한다.
이는 k 가 양수라는 가정을 만족시키지 않는다.
따라서 $a_1\in S$ 이고,
$\sqrt{a_1}=-\dfrac{3}{2}k$
인데, $k>0$ 이므로 이 경우는 불가능하다.
(i), (ii)에서 가능한 모든 양수 k 의 값은
$\dfrac{1}{3}$, 2, 16 이므로
$p=\dfrac{1}{3}+2+16=\dfrac{55}{3}$
따라서 $12p=220$

[유의사항]
이 해설 양식은 교육청 해설지 양식이며,
출판물로 나오는 해설지는 설레임팀에서
제작한 별도의 양식으로 인쇄됨을
알려드립니다.