2025학년도 대수능 미적분 주요문항 정답 및 해설

미적분

27	①	28	②	29	25	30	17

27. ①

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이므로 $g(0)=0$, $g'(0)=0$이다.

$$g(0)=f(1)+1=0,\ \text{즉}\ f(1)=-1$$

이다. 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$를 구하면

$$g'(x)=e^x f'(e^x)+e^x$$

이고,

$$g'(0)=f'(1)+1=0,\ \text{즉}\ f'(1)=-1$$

이다. 한편 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이다. 이때 함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$

이고,

$$g'(x)=e^x\left(f'(e^x)+1\right)\geq 0,$$

$$f'(e^x)\geq -1,$$

즉 $x>0$일 때, $f'(x)\geq -1$

이다. 한편 $f'(1)=-1$이므로 이차함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -1을 가져야 하고,

$$f'(x)=3(x-1)^2-1,$$

$$f(x)=(x-1)^3-x+C\ \ (C\text{는 적분상수})$$

이다. $f(1)=-1$이므로 $C=0$이다. 따라서

$$g(x)=f(e^x)+e^x=\left(e^x-1\right)^3$$

이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 $h(x)$이므로

$$h(g(x))=h\left(\left(e^x-1\right)^3\right)=x,$$

$$h'\left(\left(e^x-1\right)^3\right)\times 3\left(e^x-1\right)^2 e^x=x\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이고, ㉠에 $x=\ln 3$을 대입하면

$$h'(8)\times 3\times 2^2\times 3=1,\ \text{즉}\ h'(8)=\frac{1}{36}$$

28. ②

$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$에서 $f'(1)=0$이다. 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$를 구하면

$$f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}$$

이고, $x>0$일 때, $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록이고, $x=1$에서 극댓값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하면

$$h(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

이고, 양수 t에 대하여 닫힌구간 $[0,\ t]$에서 $h(x)\geq f(x)$이므로

$$g(t)=\int_0^t \{h(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^t \{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$$

이고,

$$g(1)=\int_0^1 \{f'(1)(x-1)+f(1)-f(x)\}dx$$

$$=f'(1)\times\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_0^1+f(1)-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$$

이다.

$$g(t)=f'(t)\int_0^t x\,dx-tf'(t)\int_0^t dx+f(t)\int_0^t dx-\int_0^t f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}t^2f'(t)-t^2f'(t)+tf(t)-\int_0^t f(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+tf(t)-\int_0^t f(x)dx$$

이므로 함수 $g(t)$의 도함수 $g'(t)$를 구하면

$$g'(t)=-\frac{1}{2}t^2f''(t)$$

이고,

$$g'(1)=-\frac{1}{2}f''(1)=\frac{3}{2}$$

이다. $g(1)$의 값을 구해보면

$$g(1)=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$$

$$=f(1)-\int_0^1 1\times f(x)dx$$

$$=f(1)-\Big[xf(x)\Big]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$=\int_0^1\left(-x^2+xe^{1-x^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}e\right)$$

$$=\frac{1}{2}e-\frac{5}{6}$$

이다.

$$\therefore\ g(1)+g'(1)=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$$

29. 25

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)=\frac{40}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)=\frac{20}{3}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)\right\}=\frac{10}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{1}{2}\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)\right\}=10,$$

이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이다. 또

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{10}{3}$이고, $1-r>0$이므로 $a>0$,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\neq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$이므로 $r<0$

이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{10}{3}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{a}{1+r}=10\ \cdots\cdots\ ㉡$$

이고, ㉠, ㉡에서 $a=5$, $r=-\frac{1}{2}$이다.

자연수 k에 대하여 $(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$의 값을 구해보면

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	$\cdots$

이다. 즉 수열 $\left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}$은 -1, -1, 1, 1이 반복되는 수열이다. 주어진 식에서

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)$$

$$=-a_{m+1}-a_{m+2}+a_{m+3}+a_{m+4}-a_{m+5}-a_{m+6}+a_{m+7}+a_{m+8}-\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(a_{m+2k-1}+a_{m+2k}\right)$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(a_{m+2n-1}+a_{m+2n}\right)$$

이다. 수열 $\left\{(-1)^n\left(a_{m+2n-1}+a_{m+2n}\right)\right\}$은

첫째항이 $-a_{m+1}-a_{m+2}=-a_{m+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$,

공비가 $-r^2=-\frac{1}{4}$

인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(a_{m+2n-1}+a_{m+2n}\right)=\frac{-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

이다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

에서

$$-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{700}$$

을 만족시키려면 $-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$가 양수여야 하므로 m은 홀수이고,

$$-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^m>\frac{1}{700},$$

$$2^m<1400$$

이어야 하므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값의 범위는 $m\leq 10$이어야 한다. 따라서 조건을 만족시키는 자연수 m은 10 이하의 홀수인 자연수 1, 3, 5, 7, 9이고, 그 합은

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=5^2=25$$

30. 17

조건 (가)에서

$f(0)=\sin b=0$, 즉 $b=k\pi$ (k는 정수),

$f(2\pi)=\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$

이다. 이때 $\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$이면

$2\pi a+b$는 방정식 $\sin x=x$

의 실근이다. $y=\sin x$라 할 때,

$y'=\cos x$이고, $x=0$일 때 $y'=1$

강사 김윤재

이므로 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는 0뿐이다. 즉

$$2\pi a+b=0$$

이다.

$$2\pi a+k\pi=0,\ a=-\frac{k}{2}$$

이고, $1 \le a \le 2$이므로 $k=-2$, $k=-3$ 또는 $k=-4$이고, 조건을 만족시키는 a, b의 순서쌍을 구해보면 다음과 같다.

a	1	$\frac{3}{2}$	2
b	-2π	-3π	-4π

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\cos(ax+b+\sin x)\times(a+\cos x)$$

이고,

$$f'(0)=\cos b\times(a+1),\ f'(4\pi)=\cos b\times(a+1)$$

이다. 한편 $2\pi a+b=0$이므로

$$\begin{aligned}f'(2\pi)&=\cos(2\pi a+b)\times(a+1)\\&=a+1\end{aligned}$$

이고, $b=-2\pi$이거나 $b=-4\pi$이면 $f'(0)=f'(2\pi)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 즉

$$a=\frac{3}{2},\ b=-3\pi\text{이고, } f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$$

이다.

$$f'(x)=\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)\times\left(\frac{3}{2}+\cos x\right)$$

에서 $\frac{3}{2}+\cos x \ge \frac{1}{2}>0$이므로 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이면

$$\cos\left(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$$

의 부호가 $x=\alpha$의 좌우에서 $(+)$에서 $(-)$로 바뀌어야 한다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x$$

라 하면

$$g'(x)=\frac{3}{2}+\cos x>0$$

이므로 함수 $g(x)$는 증가한다. $g(0)=-3\pi$, $g(4\pi)=3\pi$이므로 $\cos x$의 값이 $(+)$에서 $(-)$로 바뀌도록 하는 열린구간 $(-3\pi, 3\pi)$에 속하는 x의 값은 $-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$뿐이므로 집합 A는 방정식

$$g(x)=-\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ \frac{5}{2}\pi$$

의 실근들의 집합이다. 이때 함수 $g(x)$는 증가하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 세 직선 $y=-\frac{3}{2}\pi$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{5}{2}\pi$와 만나는 점의 개수는 각각 1이고, 집합 A의 원소의 개수 n은 $n=3$이다. 또

$$\frac{3}{2}\alpha_1-3\pi+\sin\alpha_1=-\frac{3}{2}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\alpha_1+\sin\alpha_1=\frac{3}{2}\pi$$

에서 $\alpha_1=\pi$이다. 따라서

$$n\alpha_1-ab=3\times\pi-\frac{3}{2}\times(-3\pi)=\frac{15}{2}\pi$$

이고, $p=2$, $q=15$이다.

$$\therefore\ p+q=17$$